UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

Licenciatura em Matemática

UNIOESTE - *Campus* de Cascavel

GUILHERME VIEIRA BOCHI
JANAINA MARIA DE LIMA GONÇALVES
LUCAS CAMPOS DE ARAÚJO
MATHEUS ALEXANDRE ALVES ANZOLIN

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

CASCAVEL
2018

GUILHERME VIEIRA BOCHI
JANAINA MARIA DE LIMA GONÇALVES
LUCAS CAMPOS DE ARAÚJO
MATHEUS ALEXANDRE ALVES ANZOLIN

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO I
PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação.

Orientadora: Profª. Msc. Naisa Camila Garcia Tosti

CASCAVEL
2018

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos nossos professores:

Naisa Camila Garcia Tosti por suas orientações no decorrer do projeto Promat que possibilitaram um aprendizado mutuo e um aprimoramento metodologico de nossas aulas.

Arleni Elise Sella Langer por suas obeservações e direcionamentos em suas aulas, por compartilhar suas experiências e por acreditar em nosso potencial como profissionais.

Aos demais professores participantes do projeto por suas observações e sugestões em relação as aulas ministradas as quais possibilitaram uma visão diferenciada do trabalhado desenvolvido.

Agradecemos aos nossos familiares, pela compreensão, paciência e por nos apoiarem em continuar proseguindo com nossas atividades vecendo os obstáculos em conjunto.

Agradecemos aos nosso colegas de graduação, por partilharem seus conhecimentos e experiencias no intuito de inriquecer e sugerir ideias para o desenvolvimento das atividades.

Agradecemos também a Unioeste, em especial ao diretor geral Alexandre Almeida Webber pelo apoio ao projeto Promat.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta Pasta da disciplina contém uma descrição dos momentos nos quais estivemos exercendo a prática docente.

Nosso exercício de prática ocorreu em duas estâncias e em dois momentos distintos: no primeiro semestre de 2018 estivemos envolvidos na preparação e execução do projeto denominado Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas - Promat, o qual visa oportunizar primordialmente a alunos do terceiro ano do ensino médio uma oportunidade de aprofundar e reforçar seus conhecimentos a respeito principalmente dos conceitos matemáticos abordados no ENEM e em vestibulares.

Encontram-se nesse trabalho os materiais produzidos como planos de aula, relatórios e lista de atividades, os quais foram utilizados para o desenvolvimento dos encontros do Promat, estes ocorreram presencialmente nas dependências da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste – Campus Cascavel - aos sábados no período matutino. As aulas e materiais foram preparados com o intuito de facilitar o ensino-aprendizagem de maneira significativa, propiciando aulas interativas em que o aluno expõe suas dúvidas, resoluções e conjecturas aos demais colegas ocasionando a partilha e filtração mutua dos conhecimentos.

O projeto Promat contou com cerca de 150 participantes, dentre estes os acadêmicos estagiários, professores orientadores, alunos e dentre outros participantes e perdurou por dez encontros semanais.

As atividades aqui presentes foram desenvolvidas em grupo, porém discutidas e aprimoradas com os demais grupos do Promat em encontros semanais.

Nós Guilherme, Lucas, Janaina e Matheus representamos um dos grupos de estagiários, sendo nossa professora orientadora de estágio Naisa Camila Garcia Tosti.

2. PROMAT

O Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas – Promat visa oportunizar a alunos do ensino médio, primordialmente do terceiro ano, um aprofundamento e reforço dos conhecimentos a respeito da matemática trabalhados no decorrer do processo de aprendizagem destes discentes, de forma a esclarecer os possíveis obstáculos epistemológicos presentes frutos de deficiências no processo de ensino. Ainda visa, com o aprofundamento dos conhecimentos, possibilitar um melhor desempenho por parte dos discentes em provas como o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e em vestibulares em geral, possibilitando assim uma chance maior de que estes ingressem no ensino superior.

As atividades são desenvolvidas no decorrer de dois semestres no decorrer de um ano. No primeiro semestre, alunos do 3º ano de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de metodologia de ensino e estágio I desenvolvem o projeto abordando conceitos, primordialmente, do ensino fundamental como razão, proporcionalidade, conjuntos numéricos, equação, polinômios, função e geometria euclidiana. Já no segundo semestre, alunos do 4º ano de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de metodologia de ensino e estágio II desenvolvem o projeto abordando conceitos do ensino médio como geometria analítica, trigonometria, entre outros.

2.1 Opção Teórica e Metodológica

A discussão inicial sobre a metodologia que iria ser adotada em nossas aulas no sábado, pautava-se em ministrar uma aula em que ocorria de fato o aprendizado. Em nossas buscas por algo diferente do tradicional, deparamo-nos com as tendências matemáticas. A escolha por utilizar uma única tendência, não era uma opção. Por isso, ao planejar as aulas, abordamos e mesclamos algumas dessas tendências.

Na primeira abordagem, surgiu a ideia de abordar o conteúdo pelo método da Resolução de Problemas. Recorremos ao autor Polya e seu livro “A arte de Resolver Problemas”, no qual, embasamos parte da aula do primeiro plano. Para isso, escolhemos um problema introdutório, que foi fundamental para verificarmos, de fato, a quantidade e qualidade do conteúdo aprendido pelos alunos na escola, e com isso, tínhamos uma situação-problema, que de acordo com Almoloud (2009):

> [...] é a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação mais ou menos matematizada, envolvendo um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber e de conhecimentos. Sua função principal é a utilização implícita, e depois explícita, de novos objetos matemáticos, por meio de questões postas pelos alunos no momento da resolução do problema. (ALMOLOUD, 2009)

A associação dos conceitos utilizados no problema foi importante para o prosseguimento da aula que fora abordada tradicionalmente.

A Resolução de Problemas foi à primeira opção de metodologia, no entanto, encontrar problemas que são realmente problemas ou reformular questões a fim de se obter problemas era um problema. Ainda, os problemas introdutórios e ambientes de aprendizagem deveriam ser concretizados.

Obter um padrão de aula, não era uma necessidade do grupo, por isso, para a aula seguinte, contextualizamos o conteúdo por meio da Modelagem Matemática. O segundo plano de aula, trouxemos o conteúdo de proporcionalidade abordado por meio de cálculos trabalhistas.

Conforme Burak (2008), que considera a Modelagem Matemática como uma forma aberta e contextualizada de apresentar a matemática, dando significado aos conteúdos, queríamos mostrar aos alunos que o conteúdo da aula não era só uma técnica para resolver exercícios, mas uma forma de entendimento de como ocorria os cálculos trabalhistas. Assim, a segunda aula trouxe o conteúdo para a realidade de muitos alunos.

O terceiro plano de aula, utilizamos o material *Algeplan* para abordar o conteúdo de polinômios. Buscamos fazer uma aula dinâmica, em que os alunos relacionariam o conteúdo científico com o material, objetivando uma aprendizagem significativa. Neste contexto para D'Ambrósio (2001, p. 15), o professor tem um grande desafio, o de "tornar a Matemática interessante, atrativa; relevante, útil; atual, integrada no mundo de hoje".

Em suma, o *Algeplan* foi uma forma de instigar os alunos quanto ao seu uso, e também, quanto a associação de conceitos acerca de polinômios.

No quarto plano de aula, utilizamos novamente a Resolução de Problemas para introduzir o conteúdo de equações. Usamos a ideia de explorar conceitos através do problema dado, que está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997):

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las; (BRASIL, 1997)

Assim, os alunos puderam definir estratégias e explorar a resolução do problema, sem a interferência de terceiros. Dando continuidade ao conteúdo, definimos formalmente os conceitos preestabelecidos pelos alunos.

O quinto plano de aula, abordamos por meio da Modelagem Matemática o conteúdo de conjuntos numéricos. Para a introdução do conteúdo, convidamos os alunos, a criar histórias, com o intuito de entenderem à importância da criação dos conjuntos numéricos.

Referenciamos neste ambiente para convidar os alunos a problematizar e investigar, que acordo com Barbosa (2001), "é um ambiente de aprendizagem… com referência na realidade". Definimos os conceitos acerca de conjuntos, e ao final, fizemos a utilização do material lúdico para explanar o que fora ensinado.

O sexto plano de aula, introduzimos o conceito de funções e abordamos em específico a função afim. Utilizamos o método tradicional para definir os conceitos e o uso do recurso do *software Geogebra*. Para Borba e Penteado (2001), o uso de novas mídias além de trazer a visualização para o centro de aprendizagem matemática, permite que o aluno experimente.

O sétimo plano de aula, baseamo-nos no plano anterior para abordamos o conteúdo de função quadrática. Utilizando, novamente do recurso tecnológico.

O oitavo, nono e o décimo plano de aula, respaldamo-nos na Investigação Matemática para abordar o conteúdo de Geometria Plana. Realizemos um questionário acerca de polígonos e o número π, além de dedicar uma aula exclusivamente para trabalhar conceitos a respeito do triângulo. Definimos os conceitos após a investigação das respostas dos alunos. Assim, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), propusemos atividades que instigam o aluno à descoberta de novos saberes. Ainda, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997):

> […] é necessário que, no processo de ensino e aprendizagem, sejam exploradas: a aprendizagem de metodologias capazes de priorizar a construção de estratégias de verificação e comprovação de hipóteses na construção do conhecimento, a construção de argumentação capaz de controlar os resultados desse processo, o desenvolvimento do espírito crítico capaz de favorecer a criatividade, a compreensão dos limites e alcances lógicos das explicações propostas. Além disso, é necessário ter em conta uma dinâmica de ensino que favoreça não só o descobrimento das potencialidades do trabalho individual, mas também, e sobretudo, do trabalho coletivo. (BRASIL, 1997)

Dessa forma, os alunos tiveram a oportunidade de conjecturar e verificar, de fato, o que lhe fora ensinado.

Ao longo das aulas, utilizamos várias metodologias. Pudemos verificar que o ensino dinâmico é mais atrativo, mas é necessário ainda que as definições sejam colocadas no quadro. Nem todas as aulas respaldadas em metodologias diferentes, são ambientes de aprendizagem significativa. Cabe ressaltar, que cada aluno é um ser único, e seu aprendizado é construído por ele próprio, sendo o professor, o guia para essa construção.

Referências

ALMOULOUD, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BRASIL, Secretaria de educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BURAK, Di.; KLÜBER, T. E.. **Concepções de modelagem matemática:** Contribuições teóricas. São Paulo: Educ. Mat. Pesqui., 2008.

D'AMBRÓSIO, U. **Desafios da educação matemática no novo milênio**. Educação Matemática em Revista, São Paulo: SBEM, n. 11, p . 14 – 17, dez. 2001.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

2.2 Cronograma

Encontro	Data	Conteúdo
1	28/04	Razões/proporções
2	05/05	Regras de três
3	12/05	Polinômios
4	19/05	Equações
5	09/06	Conjuntos Numéricos Introdução Funções
6	16/06	Função Afim
7	23/06	Função Quadrática
8	30/06	Geometria
9	07/07	Geometria
10	14/07	Geometria

2.3 Módulo 1 - Razão, Proporção, Regra de Três, Polinômios e Equações

2.3.1 Plano de aula do dia 28/04/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Razão e proporção.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de razão e proporção, a capacidade de resolver problemas que envolvam estes conceitos e relacioná-los com porcentagem, escala, velocidade média e densidade demográfica.

3.1. Objetivos específicos

Ao se trabalhar com razão e proporção, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma razão ou proporção;
- Comparar grandezas utilizando-se do conceito de razão;
- Relacionar o conceito de razão com porcentagem;
- Resolver problemas que envolvam razão;
- Comparar grandezas por meio da proporção;
- Resolver problemas que envolvam proporção.

3.2. Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz, folha A4, régua e fita métrica.

4. Procedimentos metodológicos

Dinâmica de apresentação:

Inicialmente realizaremos uma roda de conversa com os discentes para que possamos nos apresentar e conhecê-los melhor, principalmente, a respeito de seus objetivos com o Promat. Em sequência explanaremos que o Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: um enfoque à área de Matemática – Promat tem por objetivo oferecer um curso de matemática preparatório para vestibulares e ENEM para estudantes que cursam seu ensino básico em instituições públicas. O Promat centrará as atividades para os ingressantes aos cursos superiores, ofertando conteúdos de matemática da

Educação Básica exigidos nos concursos vestibulares da Unioeste, na forma de "Curso de Conceitos Básicos de Matemática", objetivando assim, além de sua preparação ao vestibular, a apropriação de determinados conteúdos, conceitos, estruturas matemáticas e desenvolvimentos cognitivos necessários às disciplinas da graduação, para que além de ingressar na universidade, os alunos que ingressaram possam ter menos dificuldades nas disciplinas que envolvem Matemática direta ou indiretamente. A partir desse projeto estamos utilizando mecanismos de reparação de deficiências de conteúdos matemáticos não aprendidos ou superficialmente aprendidos ao longo da escolaridade da Educação Básica.

Encaminhamento metodológico:

ETAPA 1

Neste primeiro momento, vamos nos valer da metodologia de ensino resolução de problemas visando introduzir implicitamente os conceitos a serem trabalhados, a saber, razão e proporção. Para tal, solicitaremos que os alunos respondam a primeira intricada pergunta do material do aluno.

Durante a resolução do problema, em conjunto com os alunos, explicaremos o real objetivo do problema, que é fazer o uso dos conceitos prévios que já aprenderam, além de analisar as respostas encontradas e estratégias de resolução empregadas.

Posteriormente, faremos a definição formal dos conceitos de razão e proporção na lousa:

Definição: A relação, entre duas grandezas, a: b com b≠0 de mesma natureza é chamada razão. Na razão a/b tem-se que a é o antecedente e b o consequente.

Definição: A relação entre quatro grandezas de mesma natureza por meio da divisão é chamada proporção.

ETAPA 2

Após a apresentação das definições, pediremos para os alunos resolverem o segundo problema do material do aluno. Trata-se de uma figura com repartições nomeadas e perguntas sobre esta figura. Este problema tem o objetivo de aplicar o que até então fora introduzido como conteúdo.

Por fim, corrigiremos em conjunto com os alunos, auxiliando-os por meio dessa figura desenhada no quadro, explanando as possíveis dúvidas.

ETAPA 3

Em sequência, será proposto que os discentes resolvam os problemas 3, 4 e 5 do material do aluno. Tais problemas têm o propósito de mostrar a aplicabilidade dos conceitos trabalhados, a saber, escala e velocidade média, que são definidas no próprio exercício.

Tais problemas serão corrigidos com eles igualmente aos anteriores, considerando a participação tanto na resolução individual quanto na apresentação dos resultados encontrados e suas estratégias.

ETAPA 4

Neste momento, serão apresentados no quadro o conceito de grandezas e o conceito de porcentagem.

Grandezas Pode-se compreender por grandeza tudo aquilo que pode ser medido ou contado.
Propriedade fundamental da proporção Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Assim, se a, b, c e d são números reais não nulos e formam nessa ordem, uma proporção, então a.d=b.c.
Porcentagem Denomina-se como porcentagem a razão centesimal, ou seja, a razão entre uma grandeza e o número 100.

ETAPA 5

Nesta etapa, depois de introduzidos os conceitos de grandezas e porcentagem, pediremos aos alunos para resolverem o problema 6 do material do aluno, com o objetivo de fixar o conteúdo. Nele, os alunos terão que analisar uma tabela e responder duas perguntas, relacionando com o conteúdo estudado. A primeira pergunta os alunos terão que interpretar as informações dadas na tabela e utilizar o conceito de razão para preencher o restante da tabela. Já a segunda pergunta terão que analisar todas as informações dadas no problema e utilizar a razão por meio da porcentagem.

Posteriormente, faremos a correção do exercício proposto com o auxílio dos alunos.

ETAPA 6

Nesta etapa, serão introduzidos algumas curiosidades sobre o número de Ouro e a proporção áurea por meio de uma prática:

A dinâmica terá o objetivo de encontrar o número de ouro “em seu ecorpo”. Para isto, colocaremos no quadro que o valor aproximado a ser encontrado esta no intervalo [1.5,1.8], dividiremos os alunos em grupos e cada grupo receberá uma régua e uma trena para auxiliar nas medições.

Pediremos aos alunos para encontrarem a medida em seus dedos, nos seus braços, na distância das sobrancelhas e na distância do entre o queixo e o nariz, com as seguintes instruções:

- O comprimento do braço dividido pelo comprimento do cotovelo até o dedo.
- A medida do seu dedo inteiro dividida pela medida da dobra central até a ponta, ou da dobra central até a ponta dividido pela medida da segunda dobra até a ponta.
- A medida das extremidades das sobrancelhas dividida pela extremidade de uma até o início da outra.
- A medida do queixo até a parte de cima do nariz dividida pelo queixo até a ponta no nariz.

Concluiremos, apresentando o número de ouro que é dado, aproximadamente, pela razão $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$ ... e em sequência um vídeo relacionando o número de ouro ao mundo real:

https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk

Ainda, indagaremos a cada grupo se conseguiram encontrar o número de ouro e se seus corpos são proporcionais.

5. Avaliação

A avaliação será feita com base nos resultados apresentados em sala de aula, durante as dinâmicas realizadas e os problemas e exercícios propostos.

6. Referências

MARTINS, Patrícia Camara. **O número de ouro e a divina proporção.** Pré Univesp, 2016. Disponível em: <http://pre.univesp.br/o-numero-de-ouro-e-a-divina-proporcao#.WsADdojwbIV>. Acesso em: 31 mar. 2018.

MIRANDA, Tiago. Obmep. **Módulo de razões e proporções:** A noção de razão e exercícios. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/5pkkzubk6ls88.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2018

Projeto Araribá: **matemática: ensino fundamental** / obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora executiva Juliane Matsubara Barroso.-3d.- São Paulo: Moderna, 2010.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático/G. Polya; tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995 196p.

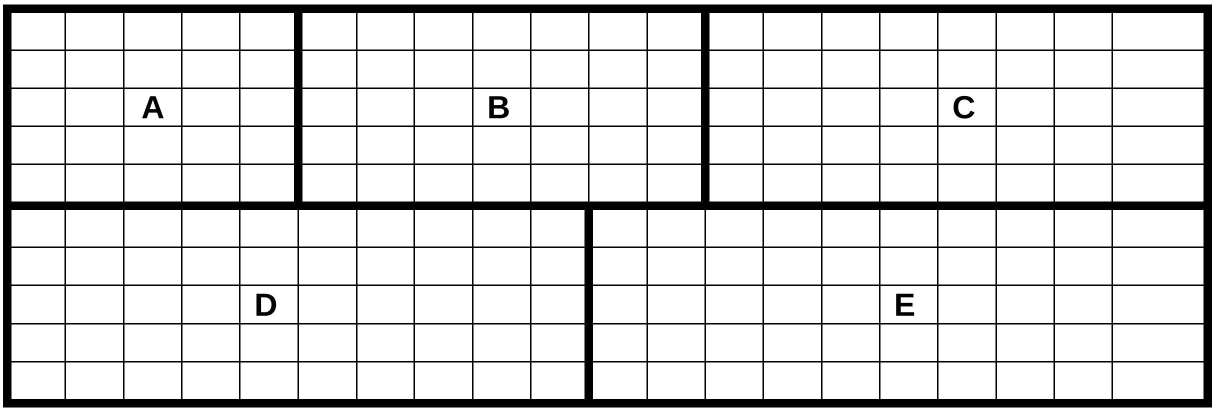
UNICAMP (Ed.). **Simulado.** Campinas: Unicamp, 2016. Disponível em: <http://www.foa.unesp.br/home/cursinho/unicamp2015_1fase_prova-xx.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2018.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1. Como é possível retirar de um rio exatamente seis litros de água se só se dispõe, para medir a água, de dois recipientes, com quatro e nove litros de capacidade?

2. Observe o desenho e responda às questões



a) O retângulo maior foi decomposto em outras figuras. Qual é a razão entre a área do quadrado A e a área do retângulo maior?
b) Qual é a razão entre a área do retângulo B e a do retângulo C?
c) Qual é a razão entre a área do retângulo D e a do quadrado A?
d) Qual é a razão entre a área do retângulo D e a do retângulo E?

3. (Unicamp) A razão entre a idade de Pedro e a de seu pai é igual a 2/9. Se a soma das duas idades é igual 55 anos, então quantos anos Pedro têm?

4. Uma escala E pode ser definida pela fórmula: E =d/D, na qual d é o comprimento de algum elemento ou a distância entre objetos no mapa e D o tamanho real em centímetros, acompanhada do e (erro gráfico, cujo cálculo é feito como e = 0,02 * D milímetros)

a) As dimensões de um avião em um mapa são 24 cm de comprimento e 19 cm de largura. As dimensões reais são 36 metros de comprimento e 28, 5 de largura. Qual a escala e o erro gráfico desse mapa?

b) Uma estrada de 120 km foi representada num mapa por um segmento de reta de 6 cm. Qual o comprimento na mapa de outra estrada, paralela à inicial, de 85 km?

c) Uma casa com área total de 240 m² foi representada numa maquete numa escala de 1: 400. A sala de jantar na maquete da casa tem dimensões 0,75 cm e 1,25 cm. Qual a razão entre a área total da casa e a área da sala jantar?

5. Denomina-se velocidade média Vm como a razão entre a distância d percorrida e o tempo t gasto para percorrê-la, ou seja, Vm = d/t.

a) João percorreu 450 km em 5 horas. Qual foi a sua velocidade média?

b) O maratonista Dennis Kimetto correu por aproximadamente 42 km em quase duas horas. Qual foi sua velocidade média?

6. O transporte de carga ao porto de Santos é feito por meio de rodovias, ferrovias e duto vias. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos ao transporte ao porto no primeiro semestre de 2007 e no primeiro semestre de 2008, indicando claramente o aumento da participação percentual do transporte ferroviário nesse período. Com base nos dados do quadro, responda às questões abaixo.

Meio de transporte	Participação no total transportado ao porto		Carga transportada (em milhões de toneladas)	
	2007	2008	2007	2008
Ferroviário	18 %	24 %	6,8	8,8
Rodoviário	77 %		29,1	
Dutoviário				

a) Determine a carga total (em milhões de toneladas) transportada ao porto no primeiro semestre de 2007. Calcule também quantas toneladas foram transportadas por dutos no primeiro semestre de 2007.

b) Sabendo que, no primeiro semestre de 2008, foram transportadas por rodovias 2,7 milhões de toneladas a menos do que o valor registrado pelo mesmo meio de transporte no primeiro semestre de 2007, calcule a participação percentual do transporte rodoviário no primeiro semestre de 2008.

7. A distância entre as cidades Rio de Janeiro e São Paulo é de aproximadamente 400 km. Um avião levou 40 minutos para percorrer este trajeto e um carro levou 5 horas. Determine a velocidade média do avião e do carro.

8. Em um hospital tem-se dois tipos de soros: um glicosado a 5% e outro a 23%.

a) Qual deve ser a razão entre o soro de 5% e o soro de 23% para que a mistura tenha concentração final de 8%?

b) Qual a quantidade de cada soro para se obter 3 litros de soro a 8%?

9. Em uma escola, duas turmas têm o mesmo número de alunos. Qual é o percentual de alunos que deve migrar para de uma turma para outra, de modo que ela passe a ter 1/3 do número de alunos dessa outra turma?

10. (ENEM – 2014) A figura 1 representa uma gravura retangular com 8m de comprimento e 6 m de altura.

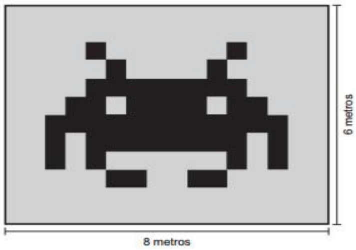


Figura 1: Gravura

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme figura 2.

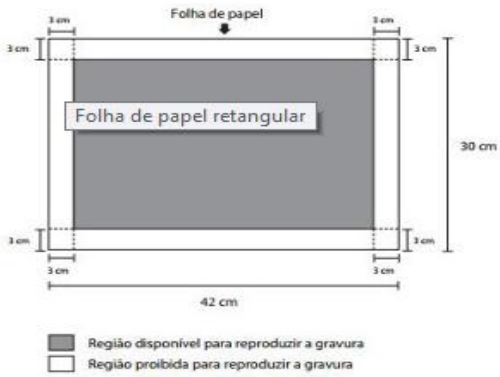


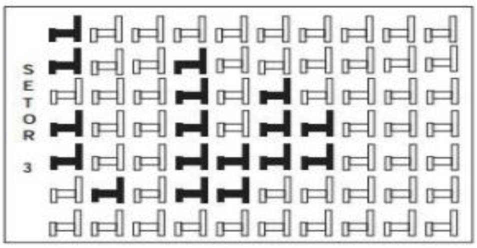
Figura 2

A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado)

Qual é a escala da gravura reproduzida na folha de papel?

11. (ENEM – 2013) Em certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.



Determine razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor.

12. (ENEM – 2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão-betoneira com 14 m³ de concreto. Qual é o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

2.3.1.1 Relatório

No sábado, dia 28 de abril de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o primeiro encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar os conceitos de razão e proporção, baseadas na metodologia resolução de problemas.

Inicialmente nos apresentamos aos discentes e propusemos que os mesmos se apresentassem, dizendo seu nome, cidade em que mora e seus objetivos em cursar o Promat. Com isto, percebemos que o objetivo da maioria era um aprofundamento nos conhecimentos acerca da matemática.

Em sequência, propomos aos discentes que se reunissem em grupos de até três integrantes para resolver as atividades que seriam propostas. Então fora proposto o problema 1, no qual esperava-se que os alunos descobrissem o conteúdo que seria trabalhado nesta aula, visto que o mesmo explora o conceito de razão e proporção, principalmente, por meio do raciocínio lógico.

Notamos que inicialmente os discentes tiveram dificuldade de raciocinar logicamente a situação exposta, pois imaginavam a necessidade de utilizar-se de um algoritmo para a solução ou ainda pensavam em encher os vasos até a metade, mas os mesmos não tinham nenhum tipo de medidor, ou seja, a medida não seria exata. No entanto, com alguns encaminhamentos que demos, grupo a grupo, a partir das ideias que os mesmos expunham logo chegaram à solução do problema. Esta fora apresentada na lousa por um dos grupos, e alguns discentes perceberam que o conteúdo a ser trabalhado era razão e proporção.

Por conseguinte, apresentamos as definições de razão e proporção e resolvemos o segundo problema, na lousa, em conjunto com os alunos. O mesmo trata-se de uma abordagem destes conceitos a partir de uma figura geométrica repartida em cinco partes, no qual não houve dúvidas.

Então, definimos a propriedade fundamental da proporção, e propomos aos discentes que resolvessem os problemas 3, 4 e 5 do seu material. No problema 3, os discentes apresentaram dificuldades na interpretação do enunciado e na utilização dos conceitos para solucioná-lo, pois não estavam compreendendo que para se chegar na solução a partir das duas equações e duas incógnitas teriam que primeiro achar o valor de uma destas e por fim da segunda.

Outra dificuldade encontrava-se na soma de frações, visto que em um momento da resolução tinha-se $\frac{2}{9}b + b = 55$, para suprir esta dificuldade desenhamos no quadro dois quadrados divididos em 9 partes e tomamos duas partes do primeiro e 9 partes do segundo, com o objetivo de mostrar que $\frac{2}{9}b + b = \frac{2}{9}b + 1b = \frac{2}{9}b + \frac{9}{9}b$ e assim aparentemente os discentes compreenderam.

No problema 4, o qual envolvia o conceito particular de proporção chamado de escala, alguns alunos não visualizaram a necessidade de se converter as medidas, visto que se tinha grandezas em centímetros e grandezas em metros. Além disso, tiveram dificuldades na interpretação do enunciado em que se tinha uma fórmula para determinação da escala, o que dificultou a resolução do exercício pelos mesmos.

Contudo, resolvemos em conjunto no quadro, explicitando que se calculando a escala do comprimento ou da largura chegaria a um mesmo valor, visto que o desenho fora feito de forma proporcional ao objeto real. Ainda que, se a escala for $1{:}400$ temos que cada $1cm$ no desenho representa $400cm$ no real.

Por conta do curto tempo restante na aula, propomos que o exercício 5 fosse feito em casa, visto sua similaridade com o anterior, porém trabalhando a ideia de velocidade média. Então definimos uma razão particular chamada de porcentagem, e em sequência resolvemos em conjunto o problema 6 que envolvia a interpretação de uma tabela de informações e o conceito de porcentagem, no qual, não houve dúvidas.

Por fim, fora proposta uma dinâmica aos alunos com o intuito de que observassem a proporcionalidade existente em seus corpos e ao seu redor. Para tal, distribuímos fitas métricas e réguas e os grupos realizaram as medições chegando a valores no intervalo [1.5,1.8]. Então apresentamos que esse valor encontrado de maneira aproximada é chamado de número de ouro e uma aproximação para o mesmo é dada pela expressão $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Então, como finalização da aula, apresentamos um vídeo que explicitava as proporcionalidades existentes na natureza e nos objetos criados pelo homem.

2.3.2 Plano de aula do dia 05/05/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Proporcionalidade e grandezas.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conceito de proporcionalidade e capacidade de reconhecer e resolver situações que envolvam proporcionalidade em diferentes contextos como no caso de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

3.1 Objetivos específicos

Ao se trabalhar com proporcionalidade, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar relações de proporcionalidade;
- Comparar grandezas diretamente ou inversamente proporcionais;
- Relacionar proporção em problemas cotidianos;
- Trabalhar proporcionalidade com duas ou mais grandezas;
- Resolver problemas com a propriedade fundamental de proporcionalidade.

3.2 Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz e folhas A4.

4. Procedimento metodológico

ETAPA 1

Pretende-se neste período resolver os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

ETAPA 2

Neste primeiro momento, vamos nos valer da metodologia de ensino etnomatemática visando introduzir os conceitos a serem trabalhados, a saber, proporcionalidade e grandezas direta e inversamente proporcionais.

Para tal, apresentaremos a definição de regra de três simples, relacionando-a com o conceito de proporcionalidade conforme abaixo:

Definição: **“**Os problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais podem ser resolvidos por meio de um processo prático chamado **regra de três simples**.” (BIANCHINI, 2008)

Ressaltaremos que este processo prático, denominado regra de três, é válido em consequência da propriedade fundamental da proporção, a qual diz**:**

Definição: Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Assim, se a, b, c e d são números reais não nulos e formam nessa ordem, uma proporção, então a.d=b.c.

Após estes encaminhamentos, apresentaremos algumas informações (listadas abaixo) a respeito das leis trabalhistas de 2018 para que os discentes consigam analisar e resolver os problemas 1, 2, 3 e 4 do Anexo, relacionando situações cotidianas com os conceitos abordados.

Resumo das leis trabalhistas de 2018:

1. Todo trabalhador deve ter carteira assinada;
2. O trabalhador não pode receber menos que um salário-mínimo, que é de R$954,00. Esse salário deve ser pago até o quinto dia útil do mês subsequente.
3. O horário de trabalho não deve ser superior a oito horas diárias, nem 44 horas semanais. É permitida a compensação de horário ao empregado que não trabalha no sábado, não atingindo o limite de 44 horas semanais. A hora extra é paga com acréscimo de 50%;
4. É considerado trabalho noturno aquele realizado entre as 22 horas de um dia e às 5 horas do dia seguinte. A hora noturna, nas atividades urbanas, deve ser paga com um acréscimo mínimo de 20% sobre o valor da hora diurna, exceto condições mais benéficas previstas em acordo, convenção coletiva ou sentença normativa;
5. As férias são pagas com acréscimo de 1/3 do seu salário e outros benefícios, tais como hora extra. O empregado terá direito há: 30 dias ocorridos, se não mais que cinco faltas não justificadas; 24 dias corridos, se possuir de 6 a 14 faltas; 18 dias corridos, se possuir de 15 a 23 faltas; 12 dias ocorridos, se possuir de 24 a 32 faltas; Para se ter direito as férias é necessário cumprir 12 meses trabalhados;

6. Em dezembro o trabalhador tem direito ao 13º salário; Para trabalhadores com salário fixo, o 13º corresponde a 1/12 do seu salário para cada mês trabalhado. O empregador tem os seguintes prazos para o pagamento: até 30 de novembro para a primeira parcela e até 20 de dezembro para a segunda parcela;
7. O trabalhador contribui com o INSS, de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 1: Contribuições trabalhistas em relação ao salário

Salário de contribuição (R$)	Alíquota para fins de recolhimento ao INSS (%)
Até 1693,72	8
De 1693,73 a 2822,90	9
De 2822,91 até 5645,80	11

Fonte: www.contabeis.com.br/tabelas/inss/

8. A empresa deposita mensalmente 8% do salário do empregado na conta do FGTS, mais 10% sobre o montante de todos os depósitos devidos, para empregados que forem demitidos sem justa causa;
9. Todo o trabalhador que mora distante do trabalho tem direito ao vale-transporte, sendo descontado de seu salário o máximo de 6% dos dias trabalhados no mês;
10. Em qualquer trabalho contínuo acima de 6 horas, é obrigatória a concessão de, pelo menos, uma hora de almoço. Não excedendo 6 horas, será, entretanto obrigatório um intervalo de 15 minutos quando a duração ultrapassar 4 horas;
11. Quando o empregado é afastado por doença, os primeiros 15 dias serão pagos pela empresa e o restante é pago pelo INSS;
12. A licença à gestante é de 120 dias. A mulher tem direito a amamentar o filho até que ele complete 6 meses de idade, usando descansos diários de 1 horas;
13. Quando o empregado é mandado embora, sem justa causa, ele terá direito a aviso prévio, férias proporcionais, 13º salário proporcional, 40% do FGTS depositado pela empresa e poderá sacar o saldo do seu FGTS;

14. Quando o empregado é mandado embora por justa causa, ele perde todos os direitos citados no item 13;

15. No caso de pedido de demissão, o empregado terá direito ao 13º salário proporcional e férias proporcionais (se estiver empregado há mais de 12 meses);

16. Tem direito ao seguro-desemprego,

Quadro 2: Números de parcelas do seguro desemprego

Solicitação	**Tempo de carteira assinada**	**Quantidade de parcelas**
Primeira	12 meses 24 meses	4 5
Segunda	9 a 11 meses 12 a 23 meses 24 meses	3 4 5
Terceira	6 a 11 meses 12 a 23 meses 24 meses	3 4 5

Fonte: http://www.trabalho.gov.br/seguro-desemprego/modalidades/seguro-desemprego-formal

Assim conseguiremos abordar, com estes problemas, a leitura e escrita, interpretação de situações problemas, cálculos com as quatro operações nos conjuntos dos números racionais, proporcionalidade, regra de três simples, porcentagem e conversão de medidas de tempo (base sexagesimal para base centesimal).

ETAPA 3

Nesta etapa pretende-se abordar alguns problemas que envolvam grandezas que variam de maneira direta ou inversamente proporcional para tal definiremos que:

Definição: Pode-se compreender por grandeza tudo aquilo que pode ser medido ou contado.
Definição: Duas grandezas variáveis dependentes são diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda.

Em sequência, será proposto o problema 5 do anexo, o qual incorpora em uma situação cotidiana os conceitos de proporcionalidade, porcentagem e regra de três.

ETAPA 4

A partir da explanação do conceito de grandezas, pretende-se abordar alguns problemas com situações em que as grandezas variam de maneira inversamente proporcional, para tal definiremos:

Definição: Duas grandezas variáveis dependentes são inversamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda.

Os problemas abordados são 6, 7 e 8 do anexo, os quais envolvem situações com grandezas inversamente proporcionais.

ETAPA 5

Nesta etapa, pretendemos trabalhar o conceito de proporcionalidade em situações que envolvam mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, para tal definiremos:

Definição: "O processo usado para resolver problemas que envolvem mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais, é chamado de regra de três composta." (Bianchini 2008).

Em sequência será proposto o problema 9 do anexo, o qual aborda a regra de proporcionalidade com 4 grandezas diretamente proporcionais. Após a resolução deste, encaminharemos o problema 10 do anexo, para trabalhar com grandezas inversamente proporcionais. Além disto, serão propostos os problemas 11 e 12 do anexo.

Vale ressaltar que os exercícios propostos serão corrigidos no quadro com o auxílio dos estudantes.

5. Avaliação

A avaliação será feita com base nos resultados apresentados em sala de aula, durante as dinâmicas realizadas, na resolução dos problemas e exercícios complementares propostos.

6. Referências

BIANCHINI, E. **Matemática Fundamental**. 6ª ed. – São Paulo: Moderna, 2006.

Grandezas proporcionais em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 04/04/2018 às 09:48. Disponível na Internet em:<https://www.somatematica.com.br/fundam/grandir.php>.

MAZZANTI, D. L. **Educação de jovens e adultos: uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas.** 2008 89f. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de matemática) – Pontifícia universidade católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo, 2008.

LAUREANO, L. J; LEITE, V. O; **Os segredos da matemática financeira**, 2 ed. Editora ática. S.d.

Regra de três *em Só Matemática*. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2018. Consultado em 13/04/2018 às 09:39. Disponível na Internet em <*https://www.somatematica.com.br/fundam/regra3c.php>.*

SILVA, D. P; GUERRA, R. B; **Regra de três e o princípio de proporcionalidade GD: Educação matemática anos finais do ensino fundamental.** 2010.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

Questão 1: Amanda começou a trabalhar em uma empresa em 13/07/2017 recebendo um salário-mínimo de R$954,00, sendo que seu horário de trabalho era de segunda a sábado, com entrada às 8:30 e com saída às 17:15 (com uma hora de almoço). Sua carteira de trabalho só foi assinada em 01/09/2017. Conforme combinado com seu patrão, seus salários não teriam descontos de INSS e vale-transporte até a assinatura da carteira. Responda às questões:

- Segundo as leis trabalhistas, seu horário de trabalho estava certo ou errado? Justifique sua resposta.
- No dia 04/08/2017 foi receber seu primeiro pagamento. Como Amanda não teve nenhuma falta, quanto ela deveria receber?
- No dia 05/09/2017 foi receber seu salário. Como Amanda havia faltado 2 dias no mês de agosto, qual foi o salário recebido por ela?
- No dia 04/10/2017, já de carteira assinada, Amanda passou a ter os descontos de INSS e do vale-transporte em seu salário. Sendo que este mês ela só faltou 1 dia, calcule quanto Amanda recebeu.

Questão 2: José ganha R$ 302,00 por semana. Sabendo que ele trabalha 40 horas por semana e fez 12 horas extras nesta semana, calcule:

- Quanto ele ganha por hora normal de trabalho?
- Quanto ele ganha por hora extra?
- Quanto ele ganhará por 12 horas extras?
- Quanto ele ganhará nesta semana?

Questão 3: Rafael começou a trabalhar numa firma ganhando ½ salário-mínimo e sem carteira assinada. Como ele era um bom funcionário, a empresa assinou sua carteira e passou a pagar dois salários-mínimos por mês. Baseando-se nestes dados responda:

- Qual o salário de Rafael quando ele começou na empresa?
- Quanto ele passou a ganhar na empresa após a carteira assinada?
- Quanto à empresa passou a depositar mensalmente em sua conta de FGTS?

Questão 4: Almir trabalhou na casa de Rogério, no período de 17/04/2016 à 17/04/2017, e após um pedido de demissão, foi dispensado do aviso prévio por seu patrão. Seu acerto será feito de acordo com as leis trabalhistas. Sabendo que seu salário mensal é de R$ 1250,00, determine:

- Seu salário proporcional de abril de 2017.
- O 13º salário proporcional dos meses de 2017.
- Almir tinha direito a férias? Se sim, calcule quanto ele deverá receber referente às férias.
- Quanto ele ganhou de vale-transporte no mês de abril de 2017?
- Sabendo que no mês de fevereiro Almir faltou dois dias ao trabalho, quanto ganhou nesse mês?
- Quanto ele recebeu de FGTS?

Questão 5: Quatro cães consomem semanalmente 60 kg de ração. Assim, ao aumentarmos o número de cães em 75%, qual será o consumo mensal, em kg, considerando o mês de 30 dias?

Questão 6: Com uma área de absorção de raios solares de 1,2 m², uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para 1,5 m², qual será a energia produzida?

Questão 7: Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400 km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480 km/h?

Questão 8: Uma equipe de operários, trabalhando 8 horas por dia, realizou determinada obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço for reduzido para 5 horas por dia, em que prazo essa equipe fará o mesmo trabalho?

Questão 9:(ENEM 2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novas alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.
Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado, em quilogramas, é?
Questão 10: Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 m de certo tecido. Podemos afirmar que, para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, 15 operários, trabalhando 6 horas por dia, quantos dias levaram para produzi-lo?

Questão 11: Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m³ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m³?

Questão 12: Dois pedreiros levam 9 dias para construir um muro com 2 m de altura. Trabalhando 3 pedreiros e aumentando a altura para 4 m, qual será o tempo necessário para completar esse muro?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1- (ENEM 2012) Nos shopping centers costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.
Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9200 tíquetes.
Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é?

2-(UFMG) Um relógio atrasa 1 min e 15 seg a cada hora. No final de um dia ele atrasará quantos minutos?

3-(ENEM 2012) Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124º 3' 0" a leste do Meridiano de Greenwich.
Dado: 1º equivale a 60' e 1' equivale a 60″.
PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado)
A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é?

4-(ENEM 2012) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30.000m² e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10.000m²).
A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)² é?

5-(ENEM 2012) Uma mãe recorreu à bula para verificar dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.
Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de?

6-(FESP-96) Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 m de certo tecido. Podemos afirmar que, para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, 15 operários, trabalhando 6 horas por dia levarão quantos dias?

2.3.2.1 Relatório

No sábado, dia 05 de Maio de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o segundo encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar a propriedade fundamental da proporção em situações simples e compostas com grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, baseadas na metodologia etnomatemática.

Primeiramente, fez-se uma breve retomada a respeito do conteúdo e exercícios trabalhados no encontro anterior. Neste momento, percebeu-se que poucos haviam conseguido concluir as atividades deixadas como dever extraclasse, e que ainda apresentam dificuldades na interpretação do significado de uma incógnita com relação à propriedade fundamental da proporção.

Em sequência, explicamos que no encontro em questão iríamos explorar a propriedade fundamental da proporção, partindo inicialmente de uma contextualização sob algumas leis trabalhistas vigentes em 2018. Para tal, esboçamos um quadro com algumas informações, conforme abaixo, então pedimos para que os alunos formassem grupos de 3 a 4 integrantes.

Quadro 3: Resumo das principais leis trabalhistas

Mês comercial	30 dias
Horas Max. Trabalho	8h diárias e 44h semanais
Férias	$\frac{1}{3} salário$
13º Salário	$\frac{1}{12} salário\ por\ mês\ se\ trabalhar\ 1\ ano$ $\frac{1}{n}\ salário\ se\ trablhar\ n\ meses$
FGTS	8% sob a remuneração p/ mês
INSS	8% até 1693,72 p/ mês 9% de 1693,73 até 2822,90 p/ mês 11% de 2822,91 até 5645,80 p/ mês
Vale Transporte	6% sob a remuneração p/ mês
Salário mínimo	R$954,00

Fonte: autores

Então, propomos o primeiro problema aos discentes que se empenharam a resolvê-lo. Notou-se que, a maioria dos discentes, conhecia o processo de resolução pela propriedade fundamental da proporção, pois a mesma fora ensinada na escola como a “regra de três”. No entanto, houve certa confusão na interpretação dos problemas em relação às leis apresentadas. Esta dificuldade fora suprida individualmente nos grupos com a releitura do enunciado e das leis invocadas.

Por conseguinte, fez-se a correção do problema na lousa com o auxílio dos alunos que se propuseram a expor suas resoluções. Neste momento, percebeu-se que os discentes, em geral, preferem trabalhar com a multiplicação e divisão com números decimais e aproximações, o que decorre do hábito de não utilizar-se de outras maneiras de solução, seja por falta de conhecimento ou por condicionamento.

Após isto, propomos os dois problemas conseguintes como dever extraclasse em decorrência da semelhança com o primeiro. Então realizamos a resolução do quarto problema em conjunto com os discentes na lousa, expondo passo a passo da resolução, para esclarecer as possíveis dúvidas de interpretação ou nos algoritmos utilizados nos cálculos. Novamente, percebemos que os discentes estão habituados há um método engessado de resolução. Contudo, a solução do problema foi compreendida.

A partir deste trabalho, explicamos que os cálculos foram realizados de maneira “direta”, ou seja, sem analisar as informações em decorrência das grandezas serem diretamente proporcionais. Então expomos as definições de grandeza, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Além disso, verbalmente explicamos que em situações que envolvem até duas grandezas são ditas simples e quando temos três ou mais grandezas envolvidas diz-se situação composta.

Então, propomos os exercícios de fixação a respeito de grandezas direta ou inversamente proporcionais, sendo que inicialmente solucionou-se um exemplo de proporção composta diretamente proporcional na lousa utilizando-se de três formas diferentes de resolução.

Nestes exercícios de fixação, percebeu-se que a propriedade fundamental da proporção havia sido compreendida. No entanto, ainda faltou uma análise mais criteriosa em relação aos enunciados, pois alguns discentes apresentam dificuldades na estimativa da resposta a partir das informações contidas no enunciado.

Contudo, acreditamos que os discentes conseguiram compreender os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, pois concluíram a resolução dos problemas 6, 7, 8 e 9 propostos em seu material sem muita dificuldade. Por fim, propomos que os demais problemas, no caso 10, 11 e 12, ficassem como dever extraclasse, os quais serão brevemente abordados no próximo encontro.

2.3.3 Plano de aula do dia 12/05/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Polinômios.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conceito de polinômios.

3.1 Objetivos específicos

Ao se trabalhar com polinômios, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar e representar diversas situações por meio de uma expressão algébrica;
- Solucionar as operações que envolvem polinômios;
- Identificar o grau de um polinômio;
- Relacionar o material lúdico com os polinômios.

3.2 Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz, folha A4 e Algeplan.

4. Procedimentos Metodológicos

ETAPA 1

Pretende-se neste período resolver os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

ETAPA 2

Primeiramente, escreveremos na lousa os seguintes conceitos:

Expressão algébrica

Expressões algébricas são aquelas formadas por números e letras ou somente por letras. Essas letras são chamadas de variáveis.

Valor numérico de uma expressão algébrica

O valor numérico de uma expressão algébrica é o número que se obtém ao substituir as variáveis por números.

E também os seguintes exemplos:

$$ax + b\ ;\ 3x + 2\ ;\ \frac{1}{2}x - 1$$

ETAPA 3

Nesta etapa introduziremos o conteúdo de polinômios com a seguinte formalização dos conceitos abaixo na lousa:

Monômio

Um monômio é um número ou uma expressão algébrica formada pelo produto de um número por uma ou mais variáveis afetadas por expoentes que são números naturais.

Grau de um monômio

O grau de um monômio de coeficiente não nulo é a soma dos expoentes das variáveis.

Polinômio

Polinômio é uma soma finita de monômios

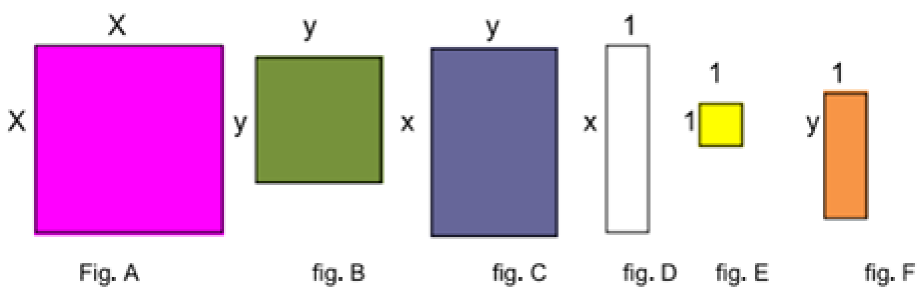
Grau de um polinômio

Num polinômio que possui mais de 2 monômios, para encontrarmos o seu grau é preciso observar se ele está com os termos semelhantes reduzidos se estiver escrito na forma reduzida, o grau que ele assumirá, é o do monômio que tiver o grau maior.

ETAPA 4

Nesta etapa pediremos aos alunos para se organizarem em grupos. Após isso, serão distribuídos kits do Algeplan para cada grupo e com o auxílio da figura abaixo que será desenhada na lousa, explicaremos que:

Figura 1: Peças do Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

O Algeplan é um material constituído de 40 peças de quadrados e retângulos de diferentes medidas. O material é composto por peças em forma de quadrados de lado x (fig. A), quadrados de lado y (fig. B), retângulos com lados x e y (fig. C), *retângulos com lados x e 1 (fig. D), quadrados de lado 1 (fig. E) e retângulos com lados y e 1 (fig. F). A cor preta ou o sinal de negativo em um dos lados do material, representa o seu valor oposto.*

Então, explicaremos que o Algeplan será utilizado como um material de auxílio para a representação de diferentes problemas e situações que serão propostos no decorrer da aula.

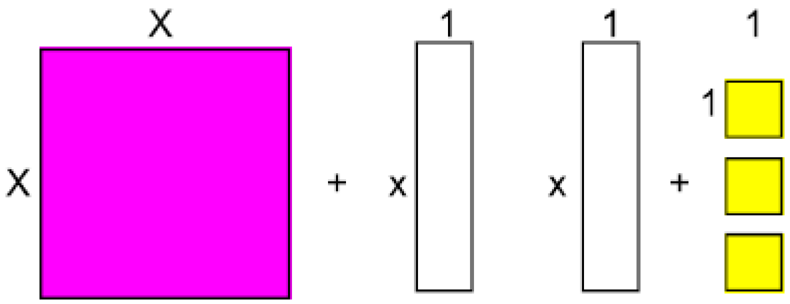
ETAPA 5

Pediremos aos alunos que com o auxílio do Algeplan represente as seguintes situações que serão escritas na lousa:

Tome 1 quadrado de lado x, 2 retângulos de lados x e 1, e 3 quadrados de lado 1. Efetue a soma das áreas das figuras e expresse o resultado em forma de expressão algébrica, classificando-a em monômio, binômio ou polinômio;

Com esta situação, os alunos obterão a expressão trinomial $x^2 + 2x + 3$ e a seguinte representação:

Figura 2: Representação da expressão trinomial no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

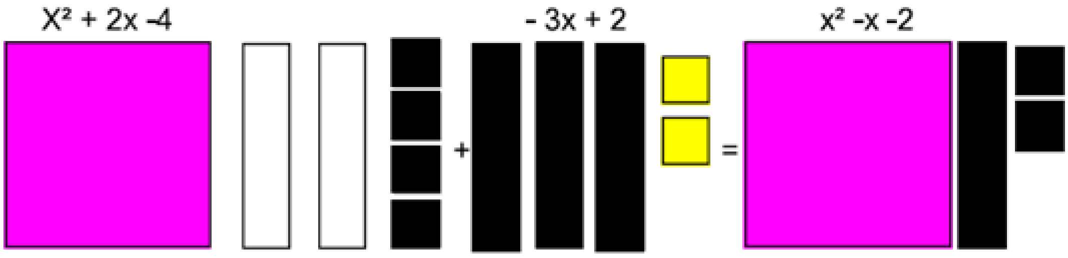
Com a ajuda do material, represente e resolva:

$(x^2 + 2x – 4) + (-3x + 2)$

$(3x^2 + 2x + 5) – (5x^2 + x + 5)$

Na letra a, os alunos modelarão as figuras da seguinte forma:

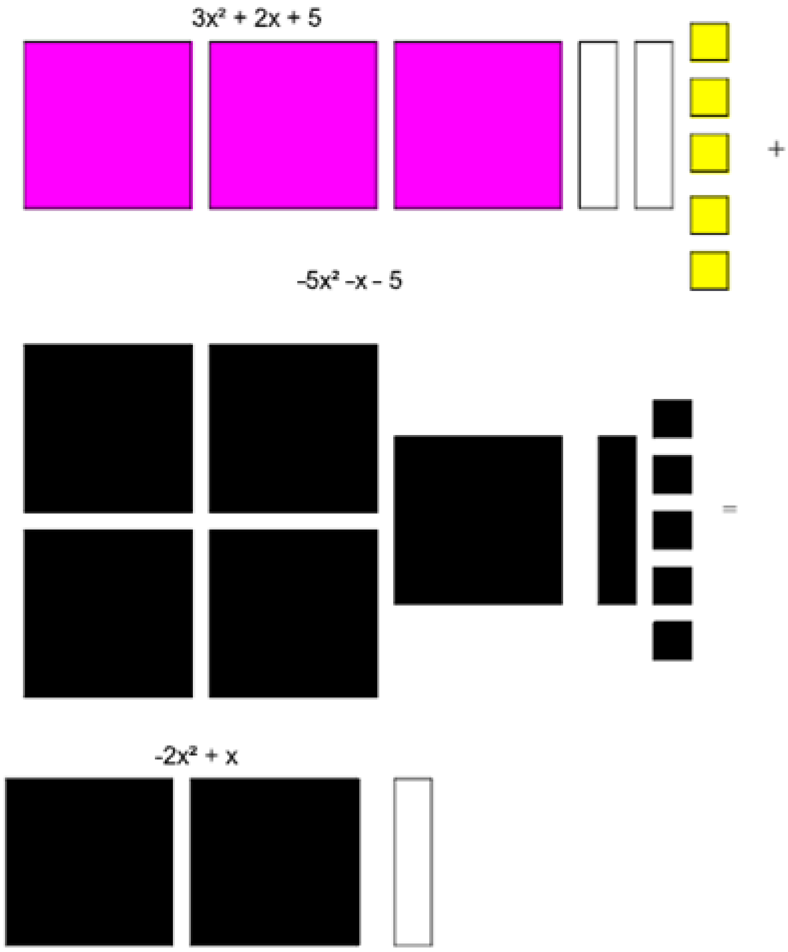
Figura 3: Representação da operação com polinômios no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Enquanto passamos nas carteiras dos alunos, lembraremos que eles deverão utilizar o material com o lado oposto para representar o sinal negativo. Na letra b, obterão a seguinte expressão e representação:

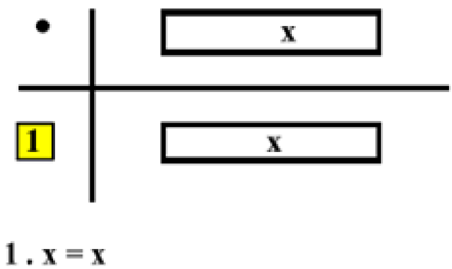
Figura 4: Representação da operação com polinômios no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Esta situação mostraremos para os alunos o seguinte: tomaremos 1 quadrado de lado 1 e um retângulo de lados x e 1. Efetuaremos a multiplicação e representaremos da seguinte forma na lousa:

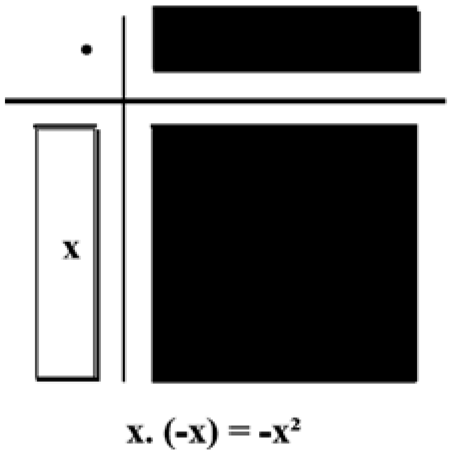
Figura 5: Representação do produto de polinômios no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Tomaremos um retângulo de lados x e 1 e um retângulo de lados x e 1 marcado como negativo. Efetuaremos a multiplicação e representaremos da seguinte forma na lousa:

Figura 6: Representação do produto de polinômios no Algeplan



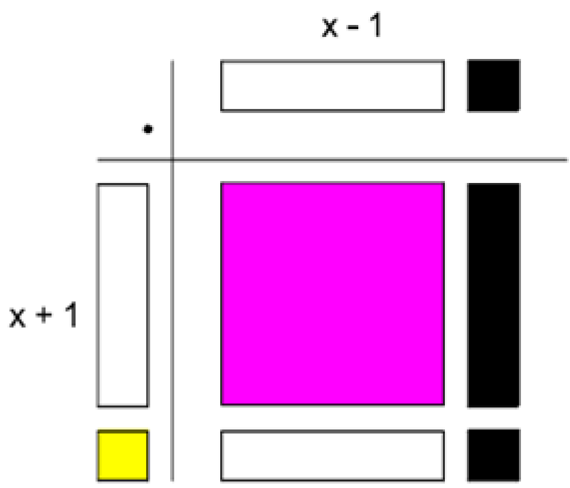
Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Os alunos poderão verificar como é feita a multiplicação pelo material e resolver a próxima situação.

Com a ajuda do material, represente e resolva:

(x – 1) * (x + 1)

Figura 7: Representação do produto de polinômios no Algeplan

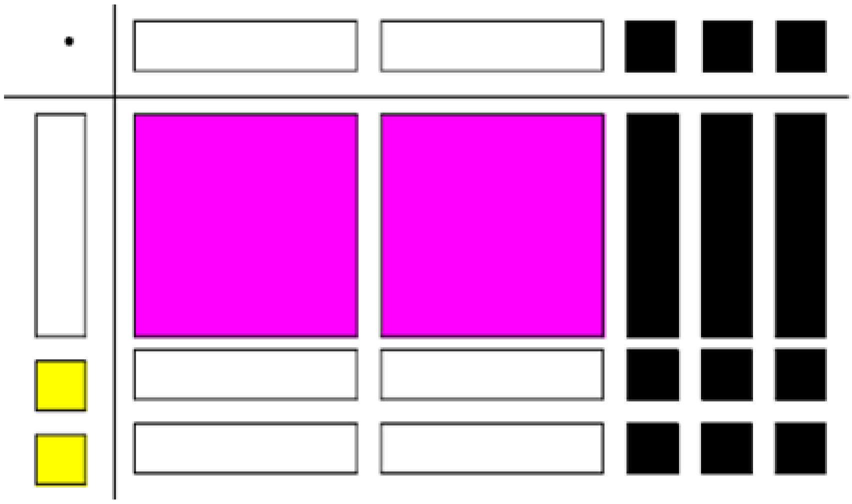


Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Com esta situação, obterão a expressão $x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1$.

(x + 2) * (2x – 3)

Figura 8: Representação do produto de polinômios no Algeplan

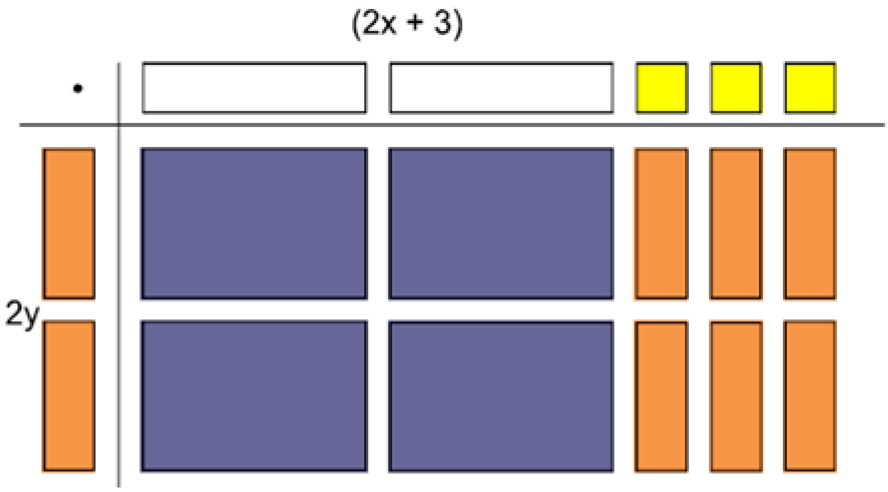


Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Com esta situação, obterão a expressão $2x^2 + x - 6$. Lembraremos os alunos do uso do material oposto para representar o negativo.

Esta situação, explicaremos para os alunos que fatorar um polinômio equivale a decompô-lo num produto indicado por polinômios. Ilustraremos a fatoração do polinômio 2y * (2x + 3) com o material e na lousa. Primeiro obteremos 4xy + 6y e representaremos com o material do seguinte modo:

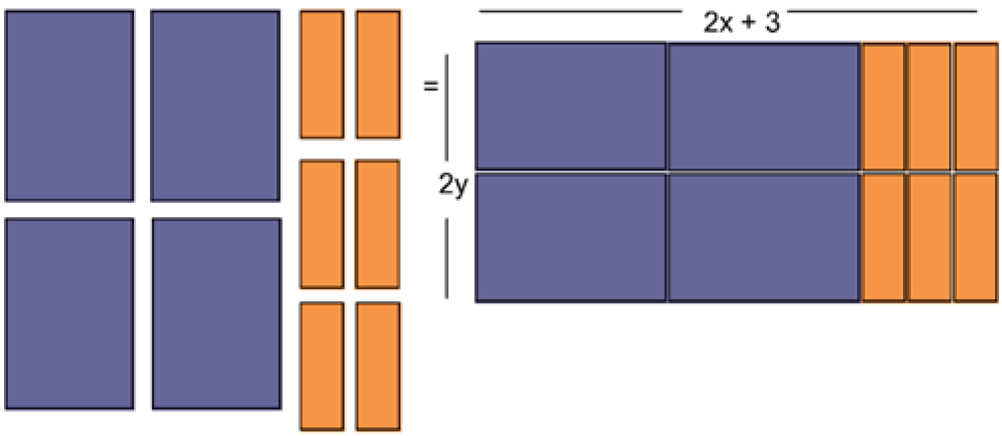
Figura 9: Representação do produto de polinômios no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Segundo, explicaremos que obtivemos um binômio na sua forma fatorada, usando o fator comum em evidência. Partiremos do resultado obtido para chegar com o auxílio do material, à sua forma fatorada que é representada por:

Figura 10: Representação fatorada do polinômio no Algeplan



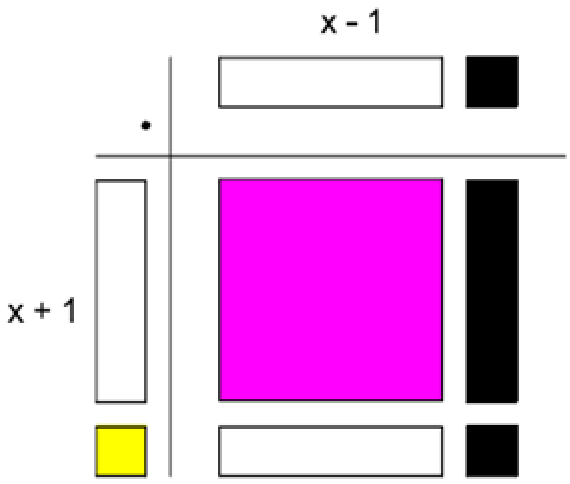
Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Mostraremos aos alunos deste modo que fatorar um polinômio é tentar representá-lo por um retângulo. Com isso, os alunos poderão resolver a situação seguinte.

Com a ajuda do material, fatore e represente o seguinte polinômio:

(x – 1)*(x + 1)

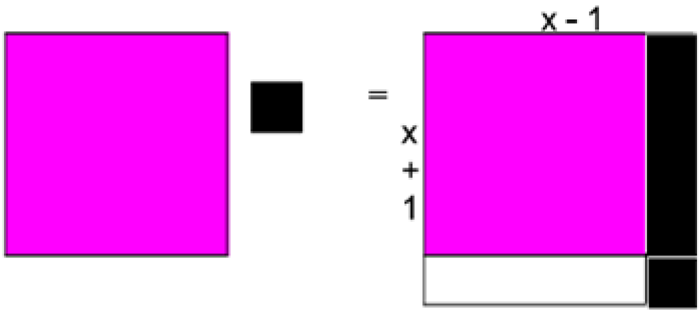
Figura 11: Representação fatorada do polinômio no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Os alunos deverão obter primeiro o resultado x² – 1, e a partir disso formar um retângulo que representará a forma fatorada desse polinômio, que será representada pelo Algeplan do seguinte modo:

Figura 12: Representação do polinômio fatorado no Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Enquanto os alunos resolvem as situações, acompanharemos cada grupo, observando as dificuldades e ajudando-os nas possíveis dificuldades.

Ao fim, escreveremos na lousa os resultados de cada situação com o auxílio dos grupos.

ETAPA 6

Após conferir os resultados, escreveremos na lousa como realizar a divisão de polinômios através do método da chave, da seguinte forma:

Dividir um polinômio f(x) por um polinômio g(x) significa encontrar um polinômio q(x)(quociente) e um polinômio r(x)(resto) da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & \underline{\quad g(x) \quad} \\ \underline{- \;\vdots\;} & \quad q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

Isso significa que:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Além disso, o grau de r(x) deve ser menor que o grau de q(x).

Escreveremos na lousa o seguinte exemplo, o qual resolveremos questionando os alunos:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 3x - 8}{x^2 + 2x - 4}$$

Colocaremos os polinômios na chave:

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 8 \quad \left| \underline{x^2 + 2x - 4} \right.$$

Explicaremos que o objetivo é encontrar um termo que quando multiplicamos por **x²** resulta em **2x³**.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 8 & \underline{x^2 + 2x - 4} \\ & \quad ? \end{array}$$

No caso, o termo que faz isso é **2x**. Ele é colocado no espaço do **quociente**.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 8 & \underline{x^2 + 2x - 4} \\ & 2x \end{array}$$

Agora, distribuímos o **2x** por todo o polinômio divisor, trocando o sinal de cada termo (para que sejam subtraídos). O resultado é somado ao polinômio dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 8 & \underline{x^2 + 2x - 4} \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 + 8x \quad\;} & 2x \\ -8x^2 + 11x - 8 & \end{array}$$

Distribuímos **(-8)** encontrado pelo divisor. Os resultados novamente são colocados abaixo do dividendo, com os sinais trocados (para indicar que serão subtraídos).

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 8 & \underline{x^2 + 2x - 4} \\ \underline{-2x^3 - 4x^2 + 8x \quad\;} & 2x - 8 \\ -8x^2 + 11x - 8 & \\ \underline{+8x^2 + 16x - 32} & \\ 27x - 40 & \end{array}$$

Obtemos o resto da divisão **(27x – 40)** possui grau 1 e o divisor possui grau 2. Quando o resto possui grau menor do que o divisor, a divisão está encerrada. Assim, o quociente é **2x-8** e o resto é **27x-40**. Podemos escrever que:

$$\underbrace{2x^3-4x^2+3x-8}_{f(x)}=\underbrace{(x^2+2x-4)}_{g(x)}\underbrace{(2x-8)}_{q(x)}+\underbrace{(27x-40)}_{r(x)}$$

Escreveremos na lousa outro exemplo que será resolvido com os alunos:

$$\frac{3x^2-8x-3}{x-3}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-8x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

O primeiro passo é encontrar que termo multiplicado por **x** resulta em **3x²**. Neste caso é o **3x**.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-8x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} & 3x \end{array}$$

Agora distribuímos **3x** pelo divisor. Os resultados são colocados abaixo do dividendo com os sinais trocados e depois somados ao dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-8x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} -3x^2+9x & 3x \\ \cline{1-1} x-3 & \end{array}$$

Precisamos de um termo que multiplicado por **x** resulta em **x**:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-8x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} -3x^2+9x & 3x+? \\ \cline{1-1} x-3 & \end{array}$$

Este termo é 1. O procedimento se repete com ele:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-8x-3 & x-3 \\ \cline{2-2} -3x^2+9x & 3x+1 \\ \cline{1-1} x-3 & \\ -x+3 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Assim, podemos escrever que:

$$3x^2 - 8x - 3 = (x - 3)(3x + 1)$$

Observe que neste caso, o resto 0. Assim, dizemos que **3x² – 8x – 3** é divisível por **(x – 3)**.

Após estes exemplos escritos e resolvidos no quadro, pediremos aos alunos para resolverem o exercício 1 do material do aluno, que trata-se de uma divisão de polinômios.

ETAPA 6

Nesta etapa, pediremos para que os alunos resolvam o restante dos exercícios que constam no material do aluno.

São exercícios, que envolvem as quatro operações matemáticas aplicadas nos polinômios. Enquanto os alunos resolvem os exercícios, passaremos em suas carteiras ajudando nas dificuldades. Ao fim, socializaremos as respostas na lousa com o auxílio dos alunos.

5. Avaliação

A avaliação será feita com base nos resultados apresentados em sala de aula, durante a resolução das situações utilizando o Algeplan, avaliaremos a utilização do material e os resultados apresentados nas situações propostas.

6. Referências

ARAÚJO, Renê Wellinhton. **O algeplan como alternativa no ensino e aprendizagem de polinômios**. Patos: UEPB, 2010. Disponível em: https://bit.ly/2mIiKWy.

Divisão de polinômios método da chave. Disponível em: <https://matika.com.br/polinomios/divisao-de-polinomios---metodo-da-chave>. Acesso em: 22 abr. 2018.

Exercícios de matemática. Disponível em:<http://enemdescomplicado.com.br/exercicios-de-matematica-polinomios-2>.Acesso em: 22 abr. 2018.

Projeto Araribá: **matemática** / obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora moderna; editora responsável Juliane Matsubara Barroso. -1. Ed. – São Paulo: Moderna, 2006.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1. Divida $x^4 - x^3 - 2x + 1$por $x - 1$.

2. (UEL) O polinômio $x^3 - x^2 - 14x + 24$ é divisível por:

a) x-1 e x+3
b) x-2 e x+5
c) x-2 e x+4
d) x-3 e x+2
e) x+5 e x-3

3. (UFC) Os números reais a, b, c e d são tais que, para todo x real, tem-se:
$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + x - 2)(x - 4) - (x + 1)(x^2 - 5x + 3)$. Desse modo, o valor de **b + d** é:

a) –2
b) 0
c) 4
d) 6
e) 10

4. (Fatec) Se o polinômio $p(x)=2x^3-5x^2-28x+15$ pode ser fatorado na forma (2x-1).(x+3).(x-k), então o valor de k é:

a) 5
b) -5
c) 10
d) 15
e) -15

5. (Unesp) Para que valores reais de a, b, c as funções polinomiais f e g, definidas por
$f(x) = x^3 + x^2 + x$
$g(x) = x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + a - b - c$
são iguais?

2.3.3.1 Relatório

No sábado, dia 12 de Maio de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o terceiro encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar operações com polinômios utilizando o material *Algeplan* baseados na metodologia lúdica.

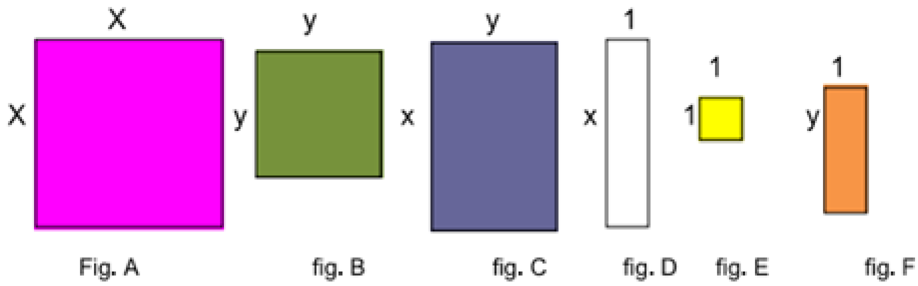
Inicialmente, retomamos algumas ideias trabalhadas na aula anterior, a respeito da propriedade fundamental da proporção, para a explanação dos exercícios deixados como dever extraclasse. Na resolução destes, fora possível notar que os discentes apresentam dificuldades na simplificação das contas, por exemplo, em notar que se um número é múltiplo ou divisor de outro podemos simplifica-los. Ainda, que se valem de regras que lhes foram apresentadas na escola, como a “regra das flechas” quando temos uma proporção composta. No entanto, explanamos vagarosamente os processos para que tentassem assimilá-lo.

Em sequência, partimos para as definições a respeito de polinômios. Para tal, indagamos aos discentes o que compreendiam por expressão algébrica, e os mesmos, responderam de maneira informal que uma expressão algébrica é o produto de um número por uma variável. Então formalizamos a definição na lousa e expomos alguns exemplos como $2xy$, x^2, ...

Por conseguinte, explanamos o conceito de monômio explicando a partir da própria nomenclatura e via exemplos, como o de uma ou duas variáveis e o monômio constante. Então se definiu, que o grau de um monômio com uma variável é o expoente que acompanha a variável e se tivermos mais que uma variável é a soma dos expoentes que acompanham as variáveis. A partir disto, fora possível definir o conceito de polinômios, como sendo a reunião de monômios e que o seu grau, quando o polinômio se encontra na forma simplificada, é o maior expoente.

Dadas às definições, iniciamos a atividades com o Algeplan. Para tal, pedimos para que os discentes formassem grupos de 3 a 4 integrantes e distribuímos o material. Primeiramente, explanamos que o *Algeplan* é constituído de 40 peças, sendo quadrados e retângulos de diferentes medidas. O material é composto por peças em forma de quadrados de lado x (fig. A), quadrados de lado y (fig. B), retângulos com lados x e y (fig. C), retângulos com lados x e 1 (fig. D), quadrados de lado 1 (fig. E) e retângulos com lados y e 1 (fig. F). A cor preta ou o sinal de negativo em um dos lados do material representa o seu valor oposto.

Figura 13: Peças do Algeplan



Fonte: https://bit.ly/2mIiKWy

Então, propomos uma atividade em que os alunos tinham de somar monômios a partir do cálculo da área das figuras. Nesta, eles apresentaram certa dificuldade em visualizar a expressão algébrica no material, por não conseguirem relacionar que a mesma representa a área de uma figura. Contudo, realizamos indagações individualmente nos grupos para direciona-los ao resultado esperado, sendo este a representação geométrica da operação de adição. Feito isto, introduzimos outros dois exemplos envolvendo a subtração e adição para que resolvessem, no qual os discentes conseguiram realizar com maior facilidade.

Em seguida, partimos para as explanações a respeito da multiplicação de polinômios, evidenciando que na multiplicação devemos nos valer da propriedade distributiva. Para tal, desenhamos na lousa dois exemplos, um envolvendo o produto de um número por um monômio e o segundo com o produto de dois monômios de sinais opostos. Os discentes, inicialmente apresentaram dúvidas, mas após uma segunda explicação conseguiram compreender a multiplicação no Algeplan. Então, propomos que resolvessem dois exercícios com o material, os quais foram solucionados sem muita dificuldade.

Feito isso, explanamos a respeito da fatoração de um polinômio, denotando que fatorar é o mesmo que representar a expressão por um retângulo, pois pelo produto de seus lados (cálculo da área) se obtém a expressão fatorada. Então, propomos dois exercícios para que os alunos resolvessem com o material, nos quais os discentes tiveram certa dificuldade. Contudo, após encaminhamentos individuais nos grupos, os discentes conseguiram concluir a atividade.

Por fim, definimos a divisão de polinômios com o uso do “método da chave”, ou seja, algoritmo de divisão de Euclides. Para tal, explanamos que um número pode ser escrito como $a = b.q + r$ onde b é o divisor q o quociente e r o resto, exemplificamos a situação com divisões numéricas. Entendido a ideia do algoritmo, partimos para a divisão algébrica com a exposição de um exemplo na lousa. Então propomos um exercício aos discentes a respeito de divisão, no qual os discentes não tiveram grandes dificuldades.

2.3.4 Plano de aula do dia 19/05/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Equações.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conceito de equações.

3.1 Objetivos específicos

Ao se trabalhar com equações, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar a incógnita da igualdade;
- Comparar os membros da equação;
- Resolver equações.

3.2 Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz e folha A4.

4. Procedimentos Metodológicos

ETAPA 1

Destinaremos esta etapa a retomar o conceito de divisão de polinômios, explanando esporádicas dúvidas sobre tal método, sempre evocando o mesmo processo de divisão inteira.

Com isso, utilizaremos o restante do tempo planejado para tal etapa para resolver exercícios da lista da aula passada, especificamente os que causaram maiores dúvidas.

ETAPA 2

Em um primeiro momento proporemos a eles um problema sobre equação, nos valendo aqui da Resolução de Problemas como uma iniciação ao conteúdo a ser ministrado, será separado para resolução de tal dez minutos.

Problema:

Uma tábua de comprimento 80 cm deve ser repartida em duas partes. O comprimento da parte maior é o triplo do comprimento da parte menor. Quanto mede cada uma das partes?

Após a resolução do problema questionaremos os discentes do que sabem sobre equação, propondo que apresentem aos demais colegas na lousa o que pensaram e por meio destas respostas guiaremos até uma formalização do conceito de equação.

Equação é uma sentença matemática que contém uma ou mais incógnitas e é expressa por uma igualdade. A palavra *Equa* vem do latim, que significa igual.

ETAPA 3

Definido o que é uma equação, se faz propício também falar sobre o que é uma equação de primeiro grau, o que são variáveis, incógnitas e os membros de uma equação.

- Equação do primeiro grau:

Uma equação deste tipo é apresentada como ax + b = 0, em que *a* e *b* são valores conhecidos, *a* diferente de zero. A resolução de uma equação de primeiro grau se da isolando a incógnita em um dos lados da equação, consequentemente isolando os demais valores no lado restante.

$$x = \frac{-b}{a}; a \neq 0$$

- **Incógnita:**

Tomemos, $4x - 16 = 0$, para resolver tal equação o valor de x se apresenta de forma única, pois x = $\frac{16}{4}$; $x = 4$. Quando isso acontece chamamos o “x” de incógnita.

- **Variável:**

Como nome sugere, o valor a ser analisado estará sempre variando, por exemplo $x + y = 64$, para cada valor que eu escolher para x, o meu y será um valor diferente, pois existe uma infinidade de números que x e y somados possam assumir o valor 64. Quando isso acontece chamamos tanto x quanto y de variáveis.

- **Elementos de uma equação:**

Em uma equação qualquer, estão dispostos os seus elementos, primeiramente tudo que antecede o sinal de igualdade é chamado de 1º membro e tudo que sucede o sinal de igualdade de 2º membro. Dentro dos membros existem parcelas, tais parcelas são chamadas de termos da equação.

Exemplo $5x - 15 = 3x - 9$

A incógnita é x, os termos são 5x;-15; 3x; -9, o primeiro membro é representado por 5x-15 e o segundo por 3x-9.

ETAPA 4

Por conseguinte das formalizações, será proposto a operação em ambos os membros, evitando o abuso do “passa pro lado.”. Aplicando na lousa como exemplo:

Resolva a equação $11*n + 77 = 132$.

Como isolar n?

1° passo: Subtrair 77 em ambos os membros; $11*n = 55$.

2° passo: Dividir em ambos os membros por 11; $n = 5$.

Assim os alunos podem visualizar o que se passa em ambos os membros, utilizando as 4 operações elementares.

Remetendo-nos a mesma etapa anterior, mostraremos aos alunos o porquê do “passa pra lá”. Pois, nas escolas é nos ensinado que quando o número vai para o outro lado da igualdade ele vai à forma da sua inversa, ou seja, o positivo vira negativo e a multiplicação vira divisão e vice-versa.

Nesta etapa, pediremos para que os alunos resolvam os exercícios 1, 2, 3 e 4, pedindo para mostrar o que acontece nos dois membros da igualdade.

ETAPA 5

Por meio do conjunto universo, trabalharemos com a equação e seu conjunto solução, que está diretamente relacionado à raiz de uma equação, sendo ela de primeiro grau ou maior. E, por conseguinte esboçar a ideia de um sistema linear, nos valendo do exemplo abaixo para ilustrar e do terceiro exercício item a do material do aluno.

- **Raízes de uma equação:**

Os elementos de um conjunto solução de uma equação são chamados de raízes da equação. Para verificar se um elemento é raiz de uma equação, devemos obedecer à seguinte sequência:

✓ Substituir a incógnita por este número.

✓ Determinar o valor de cada membro da equação.

✓ Verificar a igualdade. Se os membros são iguais o elemento é uma raiz da equação.

Com um conjunto denotado por U, e sendo enumerável até os racionais, apresentaremos problemas na lousa para que o aluno identifique se a equação é verdade.

Dado U = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, encontre quais valores de U, substituídos em x, tornam as sentenças verdadeira.

a) $\frac{1}{2} + x = \frac{3}{2}$ é verdade?

b) $\frac{2}{4} - \frac{1}{2} + x = 0$ é verdade?

c) $5 + x = 3$ é verdade?

- **Sistemas Lineares:**

Um sistema linear é um conjunto de *n* equações com *m* incógnitas, tal que a solução de tal acontece quando são satisfeitas todas as equações simultaneamente, ou seja, nos dando os valores de cada incógnita.

Ex.: Josefino possui uma fazenda, donde cria porcos e galinhas. A fim de fazer uma checagem periódica, João precisa relatar quantos porcos e galinhas possui, porém não o sabe exatamente. Tudo o que sabe sobre a quantidade de Porcos e galinhas é que, a soma dos dois é igual a 100 e o número total de patas, seja de galinhas e de porcos somados, é igual a 250.

ETAPA 6

A equação que tem uma incógnita, e essa incógnita tem expoente 2, é uma equação do 2°grau.

Definição: Toda equação do 2°grau a uma incógnita pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, sendo **a**, **b** e **c** números reais e **a** diferente de zero.

Quando os coeficientes **b** e **c** de uma equação do 2°grau forem diferentes de *zero,* dizemos que a equação está na forma completa.

- **Equação do 2°grau com c = 0**

É dada por $ax^2 + bx = 0$. Que é denominada como uma equação incompleta. Para resolvê-la, basta seguir os seguintes passos:

- Evidenciando a incógnita, *x: x(ax + b) = 0;*
- Utilizando-se do conceito de multiplicação, temos que x = 0 e ax + b = 0.
- Resolver a equação de primeiro grau ax + b = 0.

- **Equação do 2°grau com b = 0**

É dada por $ax^2 + c = 0$. Na resolução de uma equação deste tipo, a raiz obtida é sempre $x = \frac{-c}{a}$ de modo que:

- Se $\frac{-c}{a}$ é um número positivo, a equação tem duas raízes;
- Se $\frac{-c}{a}$ é um número negativo, a equação não tem raiz real.

Dado as definições e conceitos da equação de 2°grau, podemos trazer o método de encontrar as raízes, que é a fórmula resolutiva do segundo grau, que é conhecida como Bhaskára. Que é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\text{, em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Se a, c > 0 e ac > b², então não temos raiz real.

ETAPA 7

Neste último momento, faremos uma dinâmica a partir do jogo *Stop* para trabalhar de forma lúdica os conceitos apresentados nesta aula. Para tal, trabalharemos com 10 equações diferentes em que os alunos terão que nos dar as raízes de cada uma.

Quando um grupo gritar “STOP”, admitindo que todos conhecem as regras, chamaremos o grupo que terminou para apresentar os resultados encontrados. Caso haja dúvida ou divergência nos resultados, resolveremos as equações referentes. As equações serão:

1. $99x + 1 = 100$.
2. $10x + 5 = 9x - 4$.
3. $x^2 - 4 = 0$.
4. $x^2 + 4 = 8$.
5. $x(x + 5) = 0$.
6. $x^2 + 5x = 0$.
7. $x(x^2 + 5x - 6) = 0$.
8. $x^3 + 5x^2 - 6x = 0$
9. $x^2 + 3x + 100 = x + 99$.
10. $100x^2 + 200x + 100 = 0$

Serão passados três tipos de equações na lousa envolvendo a fatoração, vista na aula passada, para ver de que maneira os alunos abordarão a questão do quadrado perfeito.

5. Avaliação

A avaliação será feita em sala de aula, verificando se os alunos conseguem construir as equações, visualizar o conceito de uma equação e esclarecer a ideia do "número que passa", pretende-se também mostrar o conceito da fórmula resolutiva de segundo grau. Avaliaremos as respostas e dúvidas que os alunos possam ter, com os exercícios propostos.

6. Referências

ASSIS, Cleber; MIRANDA, Tiago. **Módulo Equações e Inequações do Primeiro Grau** Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material/7tibk1tt4z488.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2018.

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina Azenha; OLIVARES, Ayrton. **Matemática : fazendo a diferença.** São Paulo: Ftd, 2006.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática, 8° ano.** São Paulo: Ftd, 2009.

IMENES, Luís Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2009.

MALVERA, Linaldo José. **Matemática Fácil 8° Série.** 5. ed. São Paulo: Ática, 1993.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1. Resolva as equações:
a) $2y + 4y + y = \frac{7}{2}$.
b) 3*(y + 7) – 5y = 17.

c) 17b + 3 = 15b + 623.

2. Qual é o número inteiro cujo dobro, aumentado de 9, é igual ao seu quádruplo, diminuído de 21?

3. Monte as equações nos seguintes exercícios e resolva.

a) No estacionamento de um edifício há carros e motos, totalizando 13 veículos e 46 rodas. Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

b) Marcos tem 12 lápis a mais que Rui, e Gilberto tem 8 lápis a menos que Rui. O total de lápis é 28. Quantos lápis têm cada um deles?

4. Veja quem é variável ou incógnita, em cada item, e depois encontra a raiz se existir.

a) (3x – 5) = 135x – 45
b) t + 50 = 8t +1
c) 2a + b = 100; cite um caso em que a igualdade permanece.
d) 10x + 82 = x + 1

5. (ENEM-2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.
De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00.

b) R$ 17,00.

c) R$ 22,00.

d) R$ 32,00.

e) R$ 57,00.

6. Encontre as raízes das seguintes equações:

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$;

b) $x^2 - 3x = 0$;

c) $4x^2 - 64 = 0$.

7. (UEL) A soma de um **número racional não inteiro** com o dobro do seu inverso multiplicativo é **33/4**. Esse número está compreendido entre:

a) 5 e 6

b) 1 e 5

c) $\frac{1}{2}$ e 1

d) $\frac{3}{10}$ e $\frac{1}{2}$

e) 0 e $\frac{3}{10}$

2.3.4.1 Relatório

No sábado, dia 19 de Maio de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o quarto encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar o conceito de equações de primeiro e segundo grau baseados na metodologia resolução de problemas.

Inicialmente, retomamos a ideia de divisão de polinômios, baseados na definição do algoritmo de divisão de Euclides, explanamos que dividir um polinômio $p(x)$ por um $a(x)$ significa encontra um polinômio tal que $p(x) = a(x)q(x) + r(x)$ onde $r < a$ em relação ao grau. Ainda, expomos alguns exemplos na lousa para que os discentes se apropriassem do conceito. Então resolvemos na lousa um dos problemas deixado como dever extraclasse, no qual utilizamos a ideia de que dado um polinômio $p(x)$ suas raízes são divisores do termo constante.

Em seguida, fora proposto aos alunos um problema introdutório para que pudessem identificar uma equação a partir do enunciado. No entanto, em geral, os discentes utilizaram raciocínio lógico para obter a resposta acabando por não identificar a equação que representa o enunciado do problema. Então, explanamos na lousa que a partir do enunciado poderíamos obter uma expressão matemática expressa por uma igualdade com uma ou mais incógnitas denominada equação, assim os discentes conseguiram compreender o objetivo do problema.

Feito isto, partirmos para a formalização do conceito de uma equação do primeiro grau que é da forma $ax + b = 0$ evidenciando que $x = -\frac{b}{a}$ satisfaz a igualdade, ou seja, é a solução/raiz da equação. Ainda, diferenciamos o conceito de incógnita e variável, expondo que uma incógnita é uma grandeza a ser encontrada para solucionar um problema/equação enquanto variável é um termo que pode ser substituído por vários valores em uma expressão.

A partir disto, exploramos o sinal de igualdade na equação utilizando-se de operações elementares. Para tal, expomos que as noções aprendidas em diversas instituições de ensino como “é positivo passa negativo”, “ta multiplicando passa dividindo”, entre outros, valem em decorrência da operação ser feita em ambos os lados da igualdade de maneira implícita. Para esclarecer esta ideia, utilizamos diversos exemplos de equações de primeiro grau envolvendo números inteiros e fracionários e realizando as operações em ambos os lados da igualdade. Isto fora compreendido pelos alunos, apesar de certa estranheza no primeiro momento, então propomos que fizessem os exercícios 1 a 4 do material, nos quais se abordou as ideias já explanadas.

Após a maioria dos discentes terminarem suas resoluções, explicamos os problemas na lousa esclarecendo as dúvidas com relação às operações aritméticas básicas e interpretação dos enunciados.

Ainda, abordamos a ideia de raiz de uma equação, expondo que a raiz de uma equação são os valores de x que satisfazem a igualdade, e que se tivermos equações com mais de uma incógnita podemos a partir de um sistema linear isolar uma das incógnitas em função da outra, de forma a poder substituir em outra equação conhecida para determinar o valor das incógnitas.

Por fim, expomos o conceito de equação do segundo grau que é da forma $ax^2 + bx + c = 0$, explicitando alguns casos particulares com relação aos coeficientes, conforme abaixo:

- $a, b, c \neq 0 \;\; ax^2 + bx + c = 0 \; x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ é a solução da equação;
- $b = 0 \;\; ax^2 + c = 0 \; x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ é a solução da equação;
- $c = 0 \; ax^2 + x = 0$ evidenciando temos $x(ax + 1) = 0$ logo $x = 0$ e $x = -\frac{1}{a}$ são soluções da equação.

A partir, disto explanamos que a equação do segundo grau pode ser resolvida a partir da formula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, então propomos que os alunos fizessem o exercício 6 de seu material, e o restante dos problemas foram propostos como dever extraclasse.

Vale ressaltar que apesar de termos preparados a dinâmica do jogo “STOP” não houve tempo hábil para trabalha-lo com os discentes.

2.4 Módulo 2: Conjuntos Numéricos e Funções

2.4.1 Plano de aula do dia 09/06/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Conjuntos numéricos.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conceito de conjuntos numéricos.

3.1. Objetivos Específicos

Ao se trabalhar com conjuntos numéricos e introdução às funções, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar a qual conjunto cada número pertence;
- Localizar números de um determinado conjunto na reta;
- Construir intervalos numéricos;
- Resolver situações que envolvam o conceito de intervalo.

3.2. Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz, cartelas e folha A4.

4. Procedimento Metodológico

ETAPA 1

Pretende-se neste período resolver os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

ETAPA 2

Primeiramente, dividiremos os alunos em três grupos. Então, contaremos a seguinte história:

"Há muito tempo, quando os números ainda não eram conhecidos, um homem chamado João possuía inúmeros animais. Para ter certeza de que outros homens em sua vizinhança não o roubavam, João criou um sistema de contagem. Cada animal das posses de João era representado por uma pedra que guardava consigo dentro de uma sacola. De tempos em tempos, João realizava um inventário para conferir se o número de animais e de pedras era o mesmo. João retirava as

pedras da sacola e, para cada animal presente em suas posses, colocava uma pedra dentro dela."

Ao fim da história, perguntaremos aos alunos se conseguiram associar o que lhe foi contado com algum conteúdo estudado em sala. Após as respostas, perguntaremos se conhecem os números naturais e de que forma está presente no cotidiano de cada um. Ainda neste momento, questionaremos sobre a necessidade da criação desse conjunto.

Após essa discussão, iremos propor a cada grupo que criem uma história, explicando como surgiu cada conjunto numérico, incluindo os números naturais. Explicitando nesta história, a necessidade da criação do conjunto.

Passaremos em cada grupo e proporemos o conjunto a qual criarão a história. Com o propósito de evitar que algum conjunto numérico fique de fora.

Enquanto realizam esta atividade, passaremos em cada grupo para relembrá-los de números que pertencem ao conjunto que estão criando a história.

Ao fim, pediremos para os alunos contarem a turma a história que criaram e perguntaremos ao restante de qual conjunto o grupo está falando.

ETAPA 3

Nesta etapa, formalizaremos o conceito de conjuntos numéricos, escrevendo na lousa as seguintes definições:

Conjuntos numéricos

Denominamos **conjuntos numéricos** os conjuntos cujos elementos são números que apresentam algumas características comuns entre si. O conjunto dos números **naturais** é o conjunto formado pelos números 0,1, 2, 3, 4, 5, …, é representado por $\mathbb{N}$.Neste conjunto é definido duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação.

O conjunto dos números **inteiros** é o conjunto formado pelos números …, -2, -1, 0, 1, 2, …, é representado por $\mathbb{Z}$. Neste conjunto, são definidas também as operações de adição e multiplicação, além de possuir o elemento simétrico ou oposto para adição. Isto é, para todo x que pertence a $\mathbb{Z}$, existe -x que pertence a $\mathbb{Z}$,que quando somamos é igual a zero.

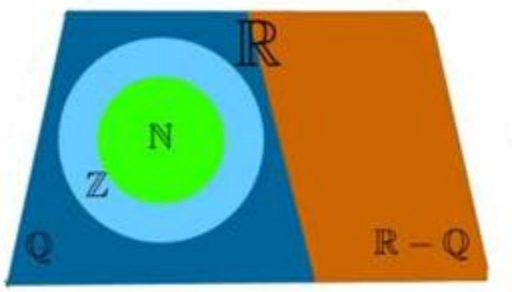
Nos conjuntos dos números **racionais**, temos o conjunto formado pelos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que *a* e *b* pertencem a $\mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Notemos que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal, realizando a divisão do inteiro *a* pelo inteiro *b*. O resultado dessa operação, será um número com uma quantidade finita de algarismos ou um número com uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente. Além disso, esse conjunto é representado por $\mathbb{Q}$.

Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Que representa um número não racional. Estes números formam o conjunto dos números **irracionais**, representado por I ou $\mathbb{Q}'$.

O conjunto dos números **reais**, representado por $\mathbb{R}$, é formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas e periódicas, que pertencem ao conjunto dos números racionais e as decimais não exatas e não periódicas, pertencentes ao conjunto dos números irracionais.

Representamos os conjuntos da seguinte forma:

Figura 14: Representação gráfica dos conjuntos numéricos



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-conjuntos-numericos.htm

Em que $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = I$.

Após a explicação sobre a construção dos conjuntos. Explicaremos a diferença de contido e pertence, utilizando o seguinte exemplo:

$$5 \in \mathbb{N} \text{e } \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$$

Assim, mostraremos aos alunos que se utiliza a notação de “pertence” para elemento de um conjunto e a notação de “contido” para um subconjunto que pertence a outro conjunto. Reforçando que quando todos os elementos de um conjunto A pertencem a um conjunto B, então, o conjunto A está contido no conjunto B.

ETAPA 4

Pediremos aos alunos para resolverem os exercícios 1,2 e 3 do material do aluno. Onde os mesmos, terão que classificar as proposições em verdadeiro ou falso. Após certo tempo, faremos a correção verbal com a ajuda dos alunos.

ETAPA 5

Nesta etapa, representaremos os conjuntos numéricos em uma reta. Construindo da seguinte forma:

Os números inteiros

1. Sobre uma reta estabelecemos um sentido positivo e um ponto O (origem), que representa o inteiro 0:

Figura 15: O ponto na reta numérica

Fonte: autores

2. A partir de 0, no sentido positivo, marcamos um segmento unitário $u \neq 0$ cuja extremidade passará representar o inteiro 1.

Figura 16: Demarcação do espaçamento unitário entre os termos da reta numérica

Fonte: autores

3. Para cada inteiro *n*, a partir de 0, marcamos um segmento de medida *n.u* no sentido negativo, cuja extremidade representará um inteiro -*n*. Obtemos o resultado:

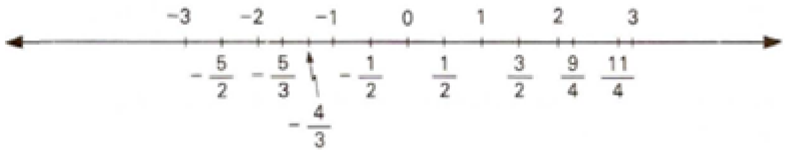
Figura 17: Demarcação dos demais termos inteiros na reta numérica

Fonte: autores

Os números racionais

Os números racionais não inteiros também podem ser representados em um uma reta. Se quisermos, por exemplo, representar o número ½ sobre a reta, marcamos a partir de 0 um segmento de medida ½ u no sentido positivo. A extremidade desse segmento representa ½. Representamos dessa maneira sobre a reta vários números racionais.

Figura 18: Reta dos números racionais

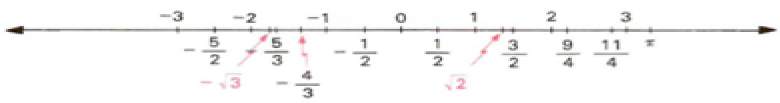


Fonte: autores

Os números reais

Observamos que os números racionais, não preenchem completamente a reta, isto é, existem pontos que não representam nenhum racional. Por exemplo, entre os pontos 1,41 e 1,42 há um ponto que representa $\sqrt{2}$= 1,414215…, irracional. Quando representamos na reta os números irracionais, cada ponto representa um número racional ou um número irracional, então, os números reais são os números que preenchem completamente a reta.

Figura 19: Reta dos números reais



Fonte: autores

Essa reta, que representa ℝ,é chamada reta real ou reta numérica.

ETAPA 6

Nesta etapa, pediremos para os alunos resolverem os exercícios 4 e 5, do material do aluno, onde é abordado a construção de um segmento de reta usando uma quantidade de números de um determinado conjunto e a localização de um número racional na reta. Posteriormente, resolveremos estes exercícios no quadro com os alunos.

ETAPA 7

Nesta etapa, explicaremos o conceito de intervalos, por:

Intervalos

A palavra “intervalo” significa: lapso de tempo que medeia entre dois momentos; intermitência; interrupção; espaço que separa dois pontos.

Para a interpretação e construção de intervalos, é importante saber alguns sinais que serão utilizados para a representação dos mesmos. Conforme o quadro abaixo:

Quadro 4: Notações para intervalos

Descrição	**Representação**
Números/pontos na reta	“a” e “b”
Maior ou igual	>= ou ≥
Menor ou igual	=< ou ≤
Maior	>
Menor	<
Fechado	[,]
Aberto	(,)
Fechado à direita (ou aberto à esquerda)	],] ou (,]
Fechado à esquerda (ou aberto à direita)	[,[ou [,)

Fonte: autores

Com estas informações, definiremos intervalo como:

- Dados dois números reais a e b, com $a < b$, definimos (a, b) como o intervalo constituído por todos os números reais que estão entre *a* e *b*, excluindo os números *a* e *b*. Representamos sobre a reta real como:

Figura 20: Intervalo aberto na reta numérica

Fonte: autores

- Dados os números reais *a* e *b*, com $a \leq b$, definimos *[a,b]* como o intervalo constituído por todos os números reais que estão entre *a* e *b*, incluindo os números *a* e *b*. Representamos sobre a reta real como:

Figura 21: Intervalo fechado na reta numérica

Fonte: autores

- Dados os números reais *a* e *b*, com *a* ≤ *x* < *b*, definimos *[a,b)* ou *[a,b[* como o intervalo constituído por todos os números reais que estão entre *a* e *b*, incluindo *a* e excluindo *b*. O número *x*, é um número entre este intervalo. Representamos sobre a reta real como:

Figura 22: Intervalo fechado à esquerda e aberto a direita na reta numérica

Fonte: autores

- Dados os números reais *a* e *b*, com *a* < *x* ≤ *b*, definimos (*a,b]* ou]*a,b]* como o intervalo constituído por todos os números reais que estão entre *a* e *b*, incluindo *b* e excluindo *a*. O número *x*, é um número entre este intervalo. Representamos sobre a reta real como:

Figura 23: Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita na reta numérica

Fonte: autores

Do mesmo modo, explicaremos para o caso de intervalos infinitos. Representando o intervalo (-∞, a] por:

Figura 24: Intervalo infinito à esquerda e fechado à direita

Fonte: autores

E o intervalo [a,+∞[por:

Figura 25: Intervalo aberto à esquerda e infinito à direita

Fonte: autores

Notação

Dados a e b, elementos do conjunto dos números reais, denotaremos o intervalo [a ,b] como o conjunto solução da seguinte forma:

$$[a\ ,b] = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x \leq b\}$$

Para o intervalo (a, b):

$$(a\ ,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b\}$$

Após esta explicação, pediremos para que os alunos resolvam o exercício 6,7 e 8 do material do aluno, que tratará a representação e interpretação geométrica de intervalos. Ao fim, corrigiremos este exercício no quadro com a ajuda dos alunos.

ETAPA 8

Nesta etapa, realizaremos um bingo com os alunos de modo a reforçar o conteúdo. Reuniremos os alunos em grupos e distribuiremos as cartelas. O bingo será realizado do seguinte modo:

I. As cartelas conterão números;
II. Sortearemos fichas com os símbolos de cada conjunto numérico, exceto os conjuntos dos números reais;
III. As cartelas terão números de um mesmo conjunto, por exemplo, 1/3 e 1/2 pertencem ao conjunto dos racionais. No entanto, o aluno poderá marcar somente uma vez quando este conjunto for sorteado;
IV. Ganha quem preencher a cartela toda;
V. Os conjuntos sorteados serão anotados em ordem no quadro.

5. Avaliação

Será realizado durante a resolução dos exercícios e da observação da postura diante as dinâmicas propostas.

6. Referências

Conjuntos numéricos – matemática para vestibular. Disponível em: <http://tudodeconcursosevestibulares.blogspot.com.br/2012/11/varios-exercicios-de-conjuntos-numericos.html>. Acesso em 18 mar. 2018.

Intervalos reais. Disponível em: <https://www.stoodi.com.br/exercicios/matematica/intervalos-reais/>. Acesso em 18 mar. 2018.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Conjuntos e Funções. São Paulo: Atual, 2013.

MOREIRA, Luiz Paulo. **Gincana dos conjuntos numéricos**. Disponível em: <https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/gincana-dos-conjuntos-na-reta-numerica.htm>. Acesso em 18 mar. 2018.

MOREIRA, Luiz Paulo. **Exercícios sobre a reta numérica dos números reais**. Disponível em: <http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-reta-numerica-dos-numeros-reais.htm>. Acesso em 18 mar. 2018.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1 – Quais das proposições abaixo são verdadeiras?
a)$3 \in \mathbb{R}$

b) $3 \in \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{2} \in I$

e)$\sqrt{4} \in I$

f)$\sqrt[3]{4} \in I$

g) $\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \in I$

h)$\frac{(3\sqrt{2})}{\sqrt{5}} \in I$

i) $\frac{(3\sqrt{2})}{(5\sqrt{2})} \in \mathbb{Q}$

2 - (CEFET – AL) Em relação aos principais conjuntos numéricos, é CORRETO afirmar que:

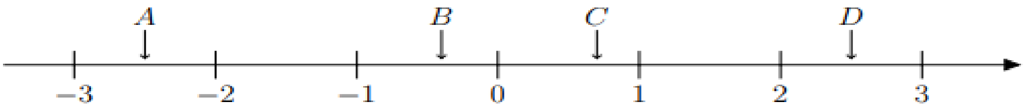
a) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
b) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
c) Todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.
d) Todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.
e) Todo número irracional é real.

3 - (FATEC) Sejam a e b números irracionais. Dada as afirmações:

I) a.b é um número irracional.
II) a + b é um número irracional.
III) a - b pode ser um número racional.

Quais das afirmações são verdadeiras?

4 – Na reta numérica abaixo, estão indicados quatro pontos: A, B, C e D. Qual ponto corresponde ao número −2/5?



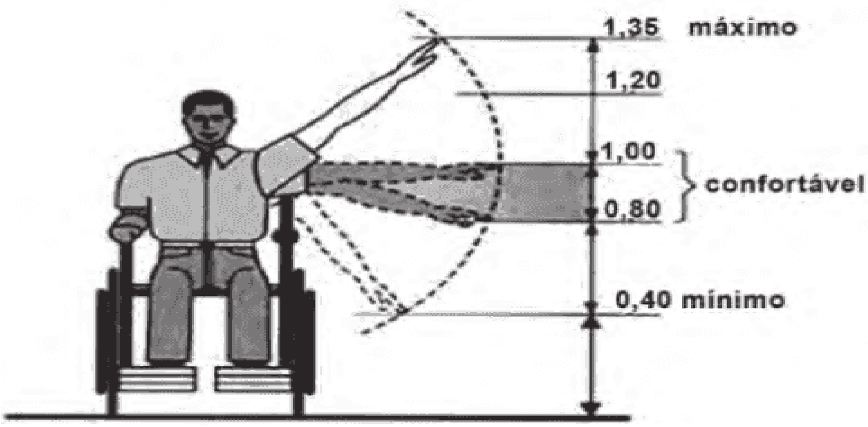
5 – Na cidade de Urupema, em determinada noite, foram registradas as seguintes temperaturas: – 1°C, – 3°C, 0°C, 3°C, 7°C e 13°C. Qual a variação de temperatura nessa cidade?

6 – Represente sobre a reta real cada um dos seguintes conjuntos:

a) A = = $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
b) B = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$
c) C = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$
d) D = $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

7 - (ENEM 2014) Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem *P* da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.
De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é?

8 - (ENEM 2012) Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Fonte: Site Stoodi

Qual proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial do comprador?

2.4.1.1 Relatório

No sábado, dia 9 de Junho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o quinto encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de trabalhar conjuntos numéricos e suas particularidades.

Inicialmente, retomamos as ideias trabalhadas nos encontros passados a respeito de equações e razão para sanar algumas dúvidas e solucionar os exercícios deixados como dever extraclasse. Em sequência, propomos aos alunos que se reunissem em grupos de até cinco integrantes, contamos uma breve história exemplificativa a respeito da criação dos números naturais, esta, por sua vez, instigou a curiosidade dos alunos, visto que ainda não haviam pensado a respeito do mundo sem os números. Então, propomos aos discentes para que criassem histórias que pudessem exemplificar por meio de situações cotidianas a criação dos demais conjuntos numéricos, sendo estes o conjunto dos inteiros, racionais, irracionais e reais.

Após certo tempo, pedimos para que alguns alunos apresentassem suas histórias, as quais nos surpreenderam em decorrência de terem relacionado conhecimentos de outras disciplinas, como história, com fatos do dia a dia. Por conseguinte, definimos matematicamente os conjuntos na lousa e explicamos as operações e características básicas de cada conjunto, além de explanar a respeito de algumas propriedades de conjunto. Então propomos aos alunos os três primeiros exercícios do material, os quais são problemas de reconhecimento, ou seja, retomada/recordação da definição. Notamos que nestes exercícios alguns discentes se confundiram na interpretação e tradução para a linguagem matemática, para sanar esta dificuldade na correção explicamos detalhadamente as sentenças.

Em seguida, explanamos a respeito da construção da reta numérica, para os números inteiros, racionais e reais. Para tal, explicitamos que uma reta é infinita em ambos os sentidos, em sequência definimos o ponto que representa o número 0, então para marcar os demais pontos representando os números inteiros tomamos a unidade $n * u$ como a distância de 0 até o número $n \in Z$. Então explicamos que quando adicionamos o conjunto dos números racionais a reta inicialmente construída, o espaço definido por $n * u$ é preenchido por infinitos números racionais e o mesmo ocorre ao adicionarmos o conjunto dos números reais a reta. Além disso, explicamos que a reta numérica pode ser construída em qualquer sentido desde que se determine a ordenação dos números. Com isto, propomos aos discentes os exercícios 4 e 5 do material, os quais envolvem a construção e análise da reta numérica.

Nestes exercícios, fora possível notar que os alunos não conseguem identificar com facilidade o valor decimal de um número fracionário nem mesmo pensar em estimativas. Portanto, no momento da resolução reforçamos a necessidade de se fazer estimativas e de se observar a fração como a divisão de dois números. Em sequência, explanamos a respeito de algumas simbologias matemáticas utilizadas para se trabalhar intervalos, como os símbolos de maior, menor, maior ou igual, menor ou igual, chaves, parênteses, entre outros. Ainda, explanamos que quando um intervalo é aberto significa que é possível se chegar tão próximo ao número na extremidade aberta quanto se queira, mas nunca se admitirá o valor do número em si. Então propomos o sexto problema que trabalha com a construção de intervalos na reta numérica.

Por fim, realizamos um bingo a respeito de conjuntos numéricos. Para tal, distribuímos cartelas com 24 casas com números diversos, então falávamos o nome de determinado conjunto e os discentes tinham que marcar um número que pertencesse ao conjunto citado. Esta atividade mostrou que os alunos compreenderam a definição, pois todos conseguiram marcar os números rapidamente e ao final de 27 rodadas tivemos um campeão. Em seguida, propomos os dois últimos problemas do material, os quais envolviam todo assunto trabalhado. Nestes, apesar de alguma dificuldade na interpretação, os discentes conseguiram resolver tranquilamente.

2.4.2 Plano de aula do dia 16/06/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Função de 1º grau.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação dos conceitos de função linear e função afim as quais poderão utilizar a construção e interpretação de gráficos.

3.1 Objetivos específicos

Ao se trabalhar com função afim, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma função;
- Interpretar uma função afim ou linear;
- Determinar a equação de uma função afim ou linear;
- Distinguir o eixo das abscissas do eixo das ordenadas;
- Trabalhar a correspondência de x e y no gráfico;
- Definir a interseção entre retas;
- Relacionar a função afim ou linear a problemas rotineiros;
- Resolver situações-problema.

3.2 Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz, folha A4 e régua.

4. Procedimentos Metodológicos

ETAPA 1

Pretende-se neste período resolver os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

ETAPA 2

Neste primeiro momento, abordaremos o conceito de função, para que as demais definições possam ser desenvolvidas. Para tal, evocaremos:

<u>Definição:</u> Dados dois conjuntos A e B, diz-se produto cartesiano de A por B e indica-se por AxB, os pares ordenados onde o primeiro elemento pertence ao A e o segundo elemento pertence ao B.

Nota: A cada par ordenado (x, y) do produto cartesiano corresponde a um ponto no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

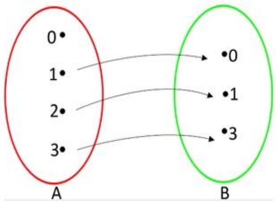
Def.: Dado dois conjuntos A e B, tal que AxB esteja definido, denomina-se relação todo subconjunto do produto cartesiano.

Def.: Dado dois conjuntos A e B, e uma relação f de A em B, denomina-se aplicação de A em B se $D(f) = A$ e se para todo $x \in B$ existe um único $y \in A$ tal que $f(y) = x$.

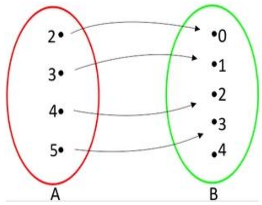
Def.: Sejam **A** e **B** dois conjuntos. Se para todo elemento x de A se associa um e único elemento y de B, estabelece-se entre A e B uma correspondência unívoca que se diz aplicação ou função. Indica-se a aplicação $f: A \to B$ou $f: x \to y$ ou $y = f(x)$ (y é a imagem de x pela aplicação f).

Ressaltaremos que para uma relação ser função todos os elementos do domínio devem estar relacionados a um e único elemento do contradomínio, logo a imagem da aplicação da f sobre X é um subconjunto do contradomínio Y. Além disso, exemplificaremos com o uso de diagramas de Venn, relações que são, e que não são funções, além de utilizá-los para definir os conceitos de Domínio e Contradomínio conforme figura 26.

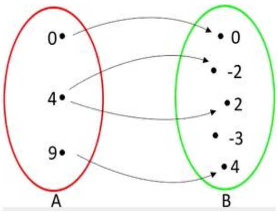
Figura 26: Diagramas de relações entre conjuntos



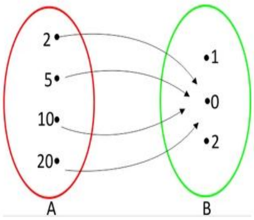
Note que nesse caso existem elementos no conjunto A (Domínio) que não se relacionam com os elementos de B (Contra Domínio), logo não é função. Porém é uma relação sobrejetora.



Note que nesse caso todos os elementos do conjunto A (Domínio) se relacionam com um e único elemento do conjunto B (Contra Domínio). Logo é função. Além disso, é uma relação injetora.



Note que nesse caso todos os elementos do conjunto A (Domínio) se relacionam com um algum elemento do conjunto B (Contra Domínio), porém esta relação não é única. Logo não é função.



Note que nesse caso todos os elementos do conjunto A (Domínio) se relacionam com um e único elemento do conjunto B (Contra Domínio). Logo é função.

Fonte: autores

ETAPA 3

Neste momento, retomaremos a definição de equação de 1º grau com duas variáveis descrevendo a mesma na lousa como se segue:

Definição: Denominamos equação do 1º grau com duas variáveis, x e y, toda equação que pode ser reproduzida na forma **y=ax+b**, sendo a e b números diferentes de zero, simultaneamente.

A partir disto denotaremos o que se segue:

Definição: Quando uma função **f**, de **R** em **R**, é definida pela equação do 1º grau com duas variáveis, diz-se **equação linear.**

Por meio destas definições, perguntaremos se **y=ax+b** é uma função e o que essa expressão representa. Feito isto, passaremos a definição formal de uma função afim, conforme segue:

<u>Definição</u>: Uma função **f** de **R** em **R** definida pela equação do 1º grau com duas variáveis **y=ax+b**, com $a \neq 0$ e $a, b \in \boldsymbol{R}$ chama-se **função afim.**

Ressaltaremos que a função linear é caso particular da função afim, basta **b=0**. Ainda, que as funções linear e afim são chamadas, de um modo geral, **funções do 1º grau.**

Com isto, poderemos reforçar que a função linear representa graficamente uma reta que passa pela origem de um plano cartesiano enquanto a função afim é uma reta que corta o eixo do y em que **y=b**. Além disso, denotaremos que **a** é o coeficiente angular da reta e **b** o coeficiente linear.

Para mostrar trabalhar a respeito das mudanças gráficas, quando alteramos o coeficiente angular e linear, utilizaremos o software Geogebra. A partir de suas ferramentas (controle deslizante) iremos alterar os valores dos coeficientes, fazendo com que a função se desloque ou cresça e decresça.

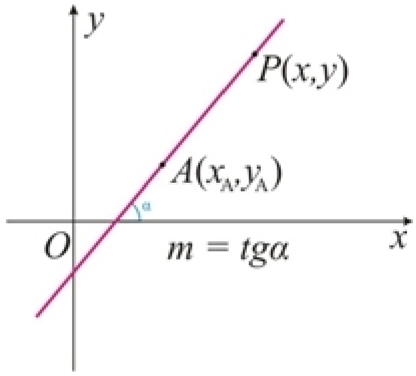
Assim poderemos indagá-los a respeito dos efeitos gráficos representados pelos coeficientes angular e linear, ou seja, o que cada um destes representa graficamente.

A partir destas explanações será proposto que os alunos resolvam o problema 1,2 e 3, do material do aluno. O problema 1, envolve a interpretação do enunciado para determinação da expressão algébrica de uma função em uma situação cotidiana. O problema 2 e 3, tratam-se da construção de uma reta, a qual deverá ter no mínimo 3 pontos. O objetivo deste é trabalhar a construção e interpretação gráfica, verificando os pontos em que a função apresenta valor positivo, negativo ou nulo. Ao fim, faremos a correção junto com os alunos.

ETAPA 4

Nesta etapa, pretendemos abordar o conceito da equação fundamental da reta a partir da interpretação gráfica do seguinte esquema:

Figura 27: Representação gráfica da equação fundamental da reta



Fonte: autores

Onde a equação fundamental da reta é $m = \frac{y-y_A}{x-x_A} \leftrightarrow y - y_A = m(x - x_A)$.

Visto que em muitos problemas é mais ágil utilizar-se desta relação em vez de utilizar-se de um sistema com as equações de 1º grau com duas variáveis.

A partir desta abordagem, será proposto aos alunos que resolvam o problema 4 do material do aluno, o qual trabalha com a interpretação do gráfico de uma função afim.

ETAPA 5

Nesta etapa, pretende-se abordar o conceito de igualdade de funções, conforme segue:

Definição: Sejam **f** e **g** funções do primeiro grau, diz-se que **f=g**, se para todo **x** temos que **f(x)=g(x)**

A partir desta noção de igualdade, partiremos para o conceito de interseção, como segue:

Definição: Sejam **r** e **s**, duas retas no plano cartesiano, então, **r** e **s** não se interceptam, ou **r** e **s** se interceptam em um único ponto.

Assim poderemos abordar o problema 5, no qual tem-se por objetivo encontrar os pontos de interseção entre funções do primeiro grau. Ainda, será proposto aos discentes que resolvam os problemas sequentes, no caso 6 e 7 do material. Corrigiremos ao fim, com a ajuda dos alunos.

ETAPA 6

Nesta etapa abordaremos as transformações que ocorrem ao se alterar o argumento de **f(x)**, ou seja, para quais valores de **x** o gráfico se move em relação ao eixo **y** e em relação ao eixo **x**. Para tal, faremos uso do *software Geogebra*.

Inicialmente, tomaremos a função **f(x) = x+1** e pediremos para os alunos a imagem desta função para alguns valores de x, conforme segue abaixo:

Quadro 5: Imagem da função f para alguns valores de x

x	$f(x)$
2	3
1	2
0	1
-1	0
-2	-1

Fonte: autores

Em sequência, tomaremos a função **g(x) = x+2**, e novamente, pediremos para que os alunos determinem a imagem da função para alguns valores de x, conforme segue:

Quadro 6: Imagem da função g para alguns valores de x

x	$g(x)$
2	4
1	3
0	2
-1	1
-2	0

Fonte: autores

Assim, esperamos que os discentes notem que o gráfico se moveu para cima em relação ao eixo **y**, que estará claro no software.

Ainda, realizaremos a análise das funções **h(x) = 2x+1** e **p(x) = -2x + 1,** observando a imagem de ambas para alguns valores de **x**, conforme segue:

Quadro 7: Imagem das funções h e p para alguns valores de x

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{h(x)}$	$\boldsymbol{p(x)}$
2	5	-3
1	3	-1
0	1	1
-1	-1	3
-2	-3	5

Fonte: autores

Reforçaremos deste modo, que o sinal do coeficiente angular da reta, denota o crescimento e o decrescimento da função.

ETAPA 7

Neste momento, abordaremos a ideia de função inversa. Para tal, vamos nos valer do conceito de função composta.

<u>Definição:</u> Sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, a função composta de **g** com **f** é denotada por $(g \circ f)(x)$, em que se lê "g bola f de x" e:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Tomaremos a função **f(x)= x+1**, pediremos para os discentes que montem uma tabela com a imagem da função para alguns valores de **x**, conforme abaixo:

Quadro 8: Imagem da função f para alguns valores de x

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
2	3
1	2
0	1
-1	0
-2	-1

Fonte: autores

Por conseguinte, indagaremos a respeito da lei de formação que leva a imagem da função **f(x)** de volta ao valor original de **x**, ou seja, para quais valores de **x**, temos $f(x) = x$ que é a função identidade.

Após a discussão com os alunos, pediremos que a partir da definição de função composta, substituam o argumento da função **f(x)** por **x-1**.

Assim, esperamos que os discentes notem que a função **g(x) = x-1** é a função inversa da **f(x) = x+1**. Analogamente para a função **g(x).**

Portanto:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1) + 1 = x = g \circ f(x)$$

5. Avaliação

Será realizado durante a resolução dos exercícios propostos e através da participação dos alunos na utilização do Geogebra.

6. Referências

CATTONY, C. – **Matemática: álgebra e geometria: 8ª série, 1º grau**. – São Paulo: IBRASA, 1979.

CATTONY, C. – **Matemática: álgebra e geometria: 7ª série, 1º grau**. – São Paulo: IBRASA, 1979.

Equações do 1º grau com duas variáveis em *Só Matemática*. Consultado em 21/04/2018 às 22:18. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/fundam/equacoes2v.php>. Acesso em 21 de abr. 2018.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade : 9° ano** – 6 . ed. – São Paulo: Atual, 2009.

SILVA, L. P. M – **Função Composta** em *Brasil Escola*. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-composta.htm>. Acesso em 29 de maio 2018.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1 – O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve um incremento de 4300 vagas no setor, totalizando 880605 trabalhadores com carteira assinada.

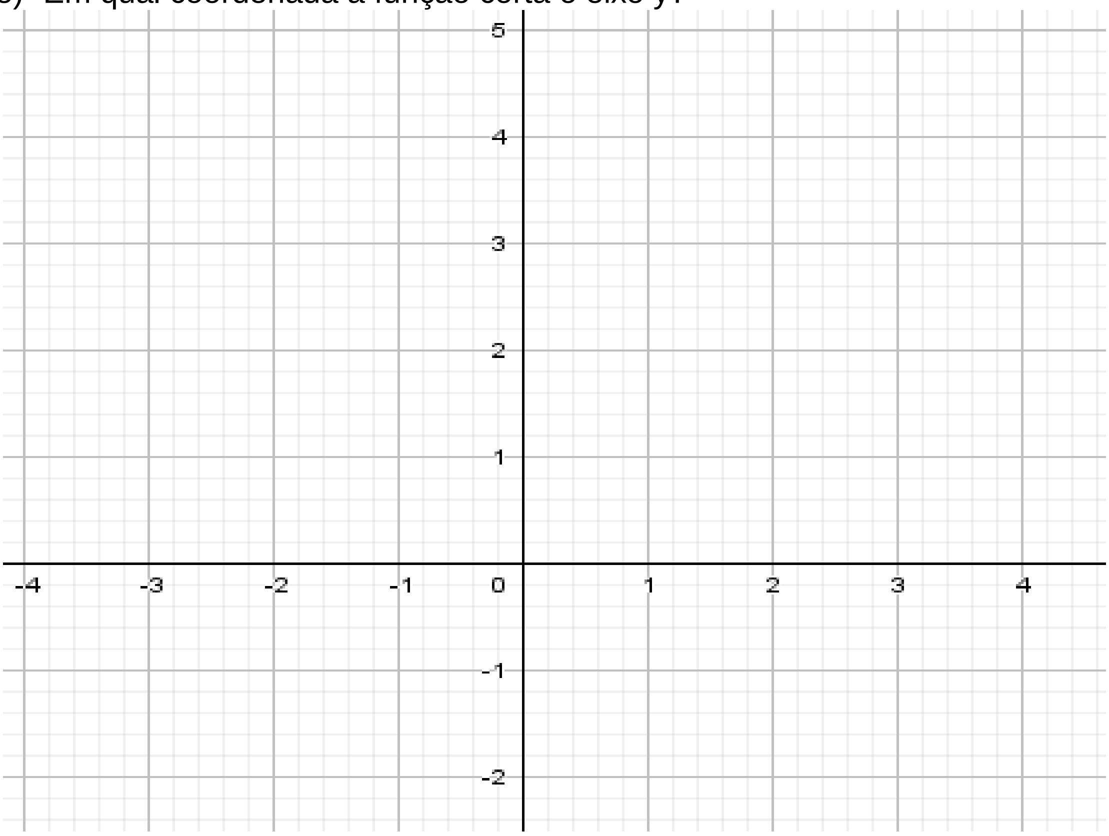
Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano.

Considerando-se que **y** e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, determine a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses.

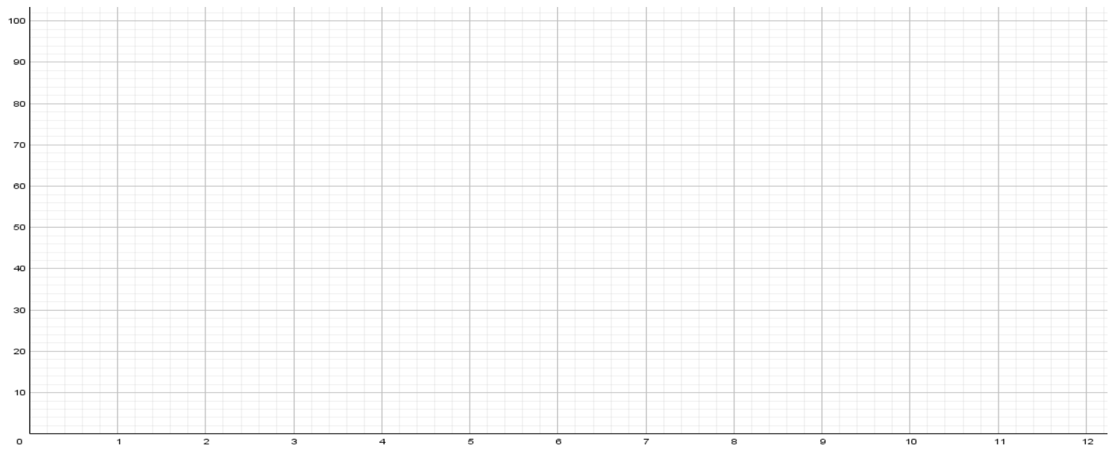
2 – Dada à função afim $f(x) = 3x + 2$ definida para todo **x** real (Dica monte uma tabela com alguns valores de **x** e **f(x)**).

a) Esboce o gráfico de **f(x)**.
b) Determine o **x** em que $f(x) = 0$.
c) Determine para quais valores de **x** temos $f(x) > 0$ e para quais $f(x) < 0$.
d) A função é crescente ou decrescente?
e) Em qual coordenada a função corta o eixo y?

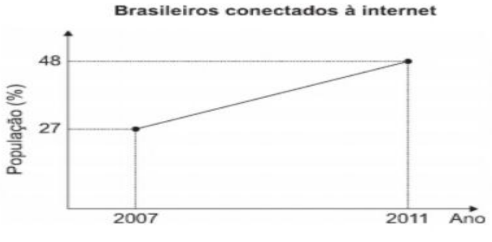


3 – Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2 h. Após essas 2 h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5 h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?



4 – O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.



Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período de 2007 à 2011. Determine a estimativa percentual de brasileiros conectados à internet em 2013.

5- Determine para quais valores de **x** as funções abaixo apresentam a mesma imagem.

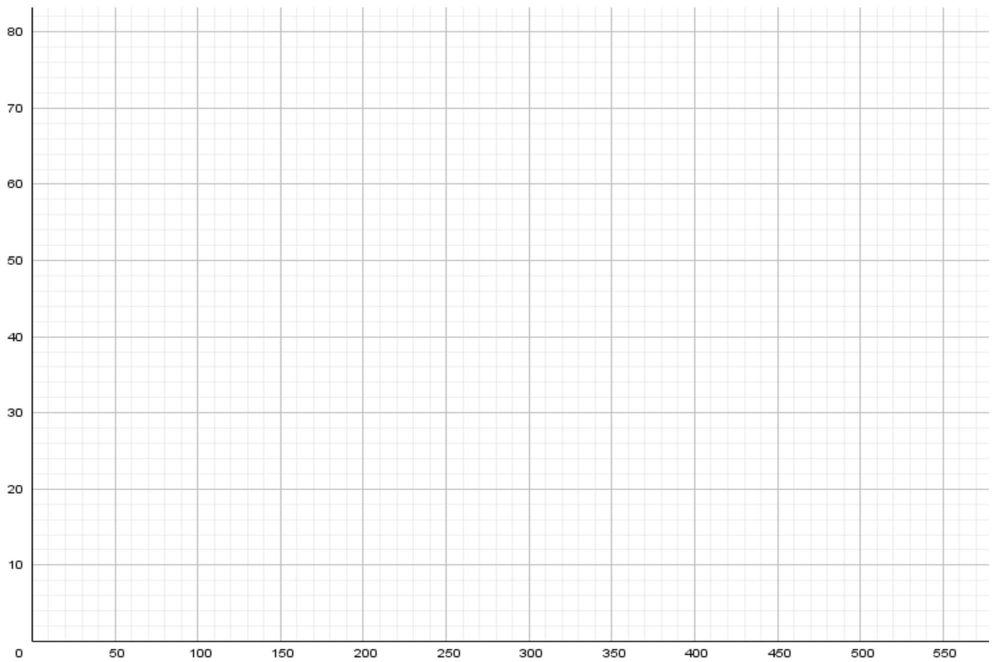
a) $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + 1$

b) $y + 4x = -1$ e $y - 5x = 1$

c) $f(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

d) $f(x) = (x-1)(x+3)x - x^3 - 2x^2$ e $g(x) = (x-2)^2 - x^2$

6 – Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por minuto excedente.
Esboce o gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados.



7 – Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

2.4.2.1 Relatório

No sábado, dia 16 de Junho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o sexto encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de introduzir o conceito de função e trabalhar a função afim e suas particularidades.

Inicialmente definimos o produto cartesiano entre dois conjuntos, como sendo o conjunto dos pares ordenados com um elemento de cada conjunto respectivamente. Em sequência, definimos que uma relação é qualquer subconjunto do produto cartesiano e que uma aplicação é uma relação em que o conjunto de partida é o todo e existe uma relação unívoca entre o conjunto de chegada e o de partida.

Por conseguinte, introduzimos o conceito de função como sendo uma aplicação, ou seja, uma relação de todos os elementos do conjunto de partida de forma única com algum elemento do conjunto de chegada. Para tornar clara tal ideia, nos utilizamos de Diagramas de Venn para exemplificar diversas situações. Ainda, utilizando os mesmos diagramas, explanamos a respeito de relações injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Além disto, explicamos a respeito do domínio, contradomínio e imagem de uma função.

Então, retomamos a noção de equação do primeiro grau, trabalhada em encontros anteriores, juntamente com algumas de suas características no intuito de introduzir o conceito de função linear do primeiro grau e função afim. Para tal, utilizamos da noção intuitiva de função, explorando a ideia de variável dependente e independente e de representações gráficas. Feito isto, exploramos as transformações gráficas com a alteração dos coeficientes da função afim utilizando-se do software Geogebra.

Isto posta, propormos os três primeiros exercícios do material, nos quais a maior dificuldade dos discentes fora a interpretação dos enunciados. Visto que, por se tratar de problemas de provas anteriores do ENEM, os mesmos apresentavam informações que dificultavam a interpretação para pessoas com pouca experiência na resolução de problemas semelhantes aos abordados. Contudo, após alguns direcionamentos nos grupos os discentes conseguiram solucionar os problemas, e os mesmos foram explanados na lousa com a participação dos discentes.

Por fim, abordamos o conceito da equação fundamental da reta, explanando sua representação gráfica e assim, propomos o quarto problema para os discentes. No qual apresentaram certa dificuldade, no entanto, após alguns encaminhamentos, alguns alunos conseguiram solucionar o problema utilizando a ideia de porcentagem. Então, explanamos o problema na lousa apresentando três formas de resolução.

2.4.3 Plano de aula do dia 23/06/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Função quadrática.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conceito função quadrática.

3.1 Objetivos Específicos

Ao se trabalhar com função quadrática, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma função de segundo grau;
- Interpretar uma função quadrática;
- Determinar a equação da função quadrática;
- Distinguir o eixo das abscissas do eixo das ordenas;
- Trabalhar a correspondência de x e y no gráfico;
- Relacionar a função quadrática a problemas rotineiros;
- Representar graficamente uma função do segundo grau;
- Identificar quando uma equação de segundo grau possui, ou não, raízes reais;
- Resolver situações-problema.

3.2 Recursos Didáticos

Material do aluno, quadro, giz, folha A4, régua e software Geogebra.

4. Procedimentos Metodológicos

ETAPA 1

Pretende-se neste período resolver os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

ETAPA 2

Neste momento, retomaremos a ideia de equação de 2º grau, descrevendo a mesma na lousa, como:

Definição: Uma equação do 2º grau simplificada pode tomar a forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, onde x é a incógnita e a, b, c são números reais quaisquer, com $a \neq 0$. Se b, ou c for igual a zero, ou ambos valerem zero temos uma equação do 2º grau incompleta. Se a, b, c forem diferentes de zero, a equação diz-se completa.

Por meio desta definição, indagaremos aos discentes se a expressão $y = ax^2 + bx + c$ é uma função e o que representa. Feito isto, passaremos a definição formal de função quadrática, conforme segue:

Definição: Quando uma função f, de Rem R, é definida pela equação do 2º grau chama-se **função quadrática**, ou **trinômio do 2º grau.** Assim, $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in R$ e sendo $a \neq 0$ é uma função.

Valor numérico do trinômio: Indicando por y o valor numérico que o trinômio assume para um determinado valor de x, podemos escrever $y = ax^2 + bx + c$ e dizer que y é uma função de variável x.

A partir disto, exemplificaremos alguns casos de função quadrática como:

- Completas:
  1. $y = ax^2 + bx + c$
- Incompletas:
  1. $y = ax^2 + c$
  2. $y = ax^2 + bx$
  3. $y = ax^2$

Com isto, esperamos que os alunos consigam diferenciar as equações completas e incompletas para que consigam dinamizar os processos de resolução em problemas que envolvam expressões quadráticas.

ETAPA 3

Neste momento, pretendemos abordar o conceito de zeros de uma função quadrática. Para tal, explanaremos que:

Definição: Dizem-se zeros ou raízes do trinômio $y = ax^2 + bx + c$, os valores de x que anulam o trinômio, isto é, transformando-o na equação $ax^2 + bx + c = 0$.

A partir desta ideia, desenvolveremos um raciocínio em conjunto aos discentes para chegar a uma fórmula resolutiva, ou seja, uma expressão que possibilite obter os valores x tais que $y = 0$. Com o intuito de se chegar a esta expressão, vamos nos valer dos conceitos trabalhados com o *Algeplan*, em que definimos que um polinômio pode ser representado geometricamente, associado à ideia de completar quadrados. Conforme explicitado abaixo:

Resolução: Seja a equação geral $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$
$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$
$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}$$
$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$
$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Posteriormente as explanações, iremos propor aos discentes o primeiro exercício, no qual se explora a ideia de completar quadrados e determinar zeros de uma função quadrática.

ETAPA 4

Ainda, discutiremos a respeito da existência das raízes, a partir da fórmula resolutiva encontrada:

Existência das raízes: Sabemos que um polinômio de grau n possui n raízes. No caso da função quadrática, a existência dessas raízes depende do discriminante Δ. Três casos podem acontecer:

- Δ$= b^2 - 4ac > 0$, então, a equação admite duas raízes reais e desiguais;
- Δ$= 0$, então a equação tem duas raízes reais iguais a qual é dada por $x = \frac{-b}{2a}$, diz que a equação tem raiz dupla.
- Δ$= b^2 - 4ac < 0$, a equação não tem raízes reais, tais dizem-se imaginárias.

A partir destas definições, será proposto o exercício 2 no qual se deve determinar se a função tem duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais ou raízes complexas.

ETAPA 5

Neste momento, pretendemos mostrar que a função quadrática representa graficamente uma curva, com eixo de simetria, denominada parábola.

Para tal, pediremos para os discentes resolverem o problema 3, no qual deve-se construir a curva de uma expressão quadrática utilizando-se de alguns pontos conhecidos, os quais foram determinados escolhendo-se um valor para x e aplicando na função.

Além disso, será abordada a ideia de zeros de uma função e a determinação dos intervalos em que a função é crescente ou decrescente.

ETAPA 6

Em sequência, faremos algumas representações no *software Geogebra* no intuito de abordar as transformações gráficas decorridas das alterações nos coeficientes da função.

Tomaremos como função inicial $f(x) = x^2 + x - 2$ para que os discentes verifiquem a simetria do gráfico. Então definiremos $g(x) = -2x^2 + x - 2$ e $d(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$ em que se alterou o coeficiente a. Pretendemos, que os discentes notem que este coeficiente altera a concavidade e que se $a > 0$ temos um valor de mínimo e que se $a < 0$ temos um valor de máximo.

Ainda definiremos as funções $h(x) = x^2 + 2x - 2$ e $k(x) = x^2 + x - 1$ em que se alterou os coeficientes b e c, assim, esperamos que os discentes notem que o coeficiente b indica se a intersecção com o eixo y ocorre à esquerda, à direita ou sobre o eixo vertical de simetria da parábola e ainda que o coeficiente c indica exatamente em que valor o gráfico intersecciona o eixo y.

A partir destas explicações iremos propor os exercícios 4 e 5, os quais envolvem a construção e interpretação de gráficos e interpretação de enunciado.

5. Avaliação

A avaliação será feita no decorrer do desenvolvimento das resoluções dos exercícios propostos, verificando se o aluno compreendeu as definições apresentadas e como ocorrem as alterações nos gráficos.

6. Referências

CATTONY, C. – **Matemática: álgebra e geometria: 8ª série, 1º grau** – São Paulo: IBRASA, 1979.

CATTONY, C.– **Matemática: álgebra e geometria: 7ª série, 1º grau** – São Paulo: IBRASA, 1979.

Equações do 2º grau em *Só Matemática*. Consultado em 21/04/2018 às 22:18. Disponível em <https://www.somatematica.com.br/fundam/equacoes2v.php>. Acesso em 21 abr. 2018.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade : 9° ano** – 6. ed. – São Paulo: Atual, 2009.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1. Utilizando-se da ideia de completar quadrados determine as raízes reais das seguintes funções quadráticas:

a) $x^2 + 10x + 24 = 0$

b) $4x^2 + 20x + 25 = 0$

c) $x^2 - 14x + 40 = 0$

d) $x^2 + 7x + 12 = 0$

2. Verifique se as funções abaixo têm raízes reais distintas, coincidentes ou complexas.

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = x^2 + 1$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

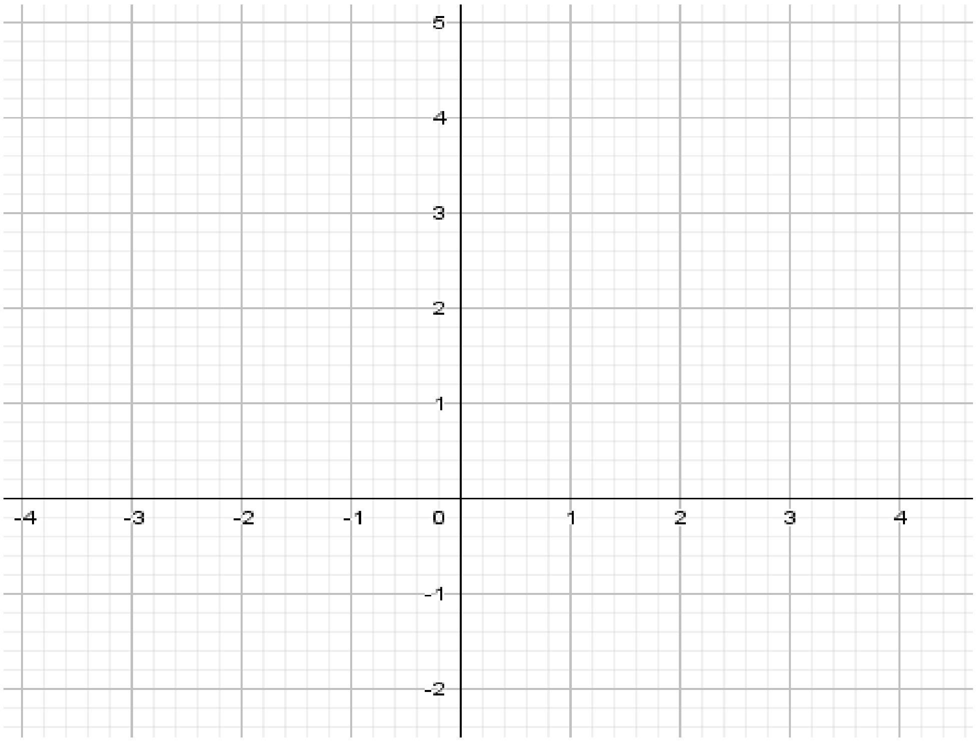
3. Dada à função quadrática $f(x) = x^2 + 2x + 1$ definida para todo x real (Dica monte uma tabela com alguns valores de x e $f(x)$):

a) Esboce o gráfico de $f(x)$;

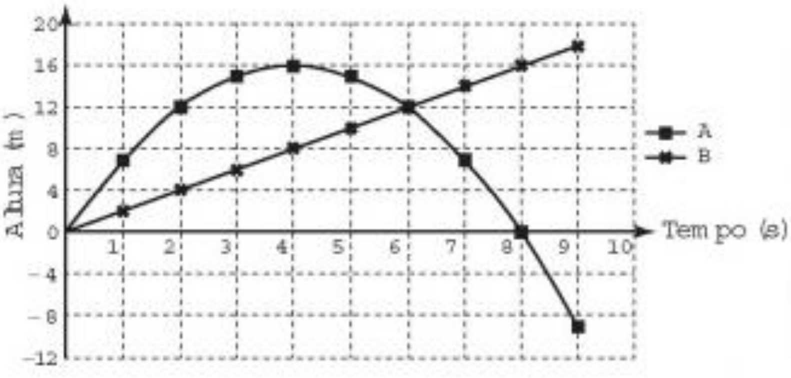
b) Determine para quais valores de $x$temos $f(x) = 0$;

c) Determine para quais valores de x temos $f(x) > 0$ e para quais $f(x) < 0$

d) Determine a coordenada em que função corta o eixo y



4. Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro descreverá uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, qual deverá ser o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B?

5. Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a 2/3 da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

6. Determine para quais valores de x as funções abaixo apresentam a mesma imagem.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x(x^2 + 2x + 1) - x^3$ e $g(x) = x + 1$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + x - 1$

7. Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número *f* de infectados é dado pela função $f(t) = -2t^2 + 120t$ (em que *t* é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção) e que tal expressão é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. A Secretaria de Saúde decidiu que uma segunda dedetização deveria ser feita no dia em que o número de infectados chegasse à marca de 1 600 pessoas, e uma segunda dedetização precisou acontecer. Em qual dia começou a segunda dedetização?

8. Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função:

$$T(t)=\begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \quad \text{para} \quad t \geq 100 \end{cases}$$

Em que *T* é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e *t* é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C. Determine o tempo de permanência dessa peça no forno em minutos.

2.4.3.1 Relatório

No sábado, dia 23 de Junho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o sétimo encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de introduzir o conceito de função do segundo grau e suas particularidades.

Inicialmente retomamos alguns conceitos trabalhados no encontro anterior a respeito da função afim. Um destes conceitos diz respeito à equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, na qual o coeficiente angular é igual ao valor da tangente do ângulo entre a reta e o eixo x. Neste momento, precisamos explicar alguns conceitos relacionados à trigonometria, pois alguns alunos ainda não haviam estudado este conteúdo. Explicamos que a tangente de um ângulo é a razão entre o seno e cosseno deste mesmo ângulo, em outras palavras, é a razão entre a medida do cateto oposto pela medida do cateto adjacente ao ângulo.

Ainda, indagamos aos alunos se dado uma reta qualquer existe outra função que desfaz o que a primeira fez, ou seja, a função inversa. E os discentes afirmaram que supostamente existe, mas não conseguiram definir claramente como seria. Então, utilizando de exemplos numéricos esclarecemos as dúvidas e explicamos que uma função só tem inversa quando é bijetora, além disso, explanamos a respeito da composição de funções do primeiro grau evidenciando que quando $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$ temos que f e g são uma a inversa da outra.

Em sequência, retomamos os conceitos a respeito de equações do segundo grau utilizando exemplos intuitivos para então apresentar a função quadrática ou função do segundo grau. Neste momento, apresentamos que a função na forma completa tem $a, b\ e\ c \neq 0$ e a incompleta tem $b\ ou\ c = 0$. Além disto, reforçamos que o valor numérico da função do segundo grau é dado substituindo os valores de x na expressão.

Por conseguinte, explanamos a respeito das raízes do trinômio do segundo grau, denotando que as raízes são os valores de x tal que $ax^2 + bx + c = 0$. E explicamos que para encontrar estes valores podemos utilizar a formula resolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, a qual obtemos completando o quadrado em conjunto com os discentes. Ainda, denotamos que o $x_v = -\frac{b}{2a}$, explicando que o x do vértice é a média aritmética entre as raízes da função e que se aplicarmos o valor x_v na expressão obtemos o $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Ressalta-se que estas expressões foram obtidas em conjunto com os discentes e não apenas apresentadas.

Dada à apresentação destes conceitos, foram propostos alguns exercícios para os discentes encontrarem as raízes de algumas expressões quadráticas utilizando-se da ideia de completar o quadrado. Nos quais os alunos tiveram dificuldade, visto que nunca haviam manipulado a expressão desta forma. Então, consideramos apropriado resolver alguns dos exercícios em conjunto para que as dúvidas fossem sanadas, o que se mostrou eficaz.

Feito isto, introduzimos a ideia da existência de raízes utilizando o valor do delta como base, o que fora compreendido pelos discentes após algumas ilustrações. Então, tratamos a respeito dos coeficientes da função quadrática, utilizando o *software Geogebra*, no qual alteramos os valores dos coeficientes para que os discentes compreendessem algumas características básicas, tais como: c é o ponto de interseção do gráfico com o eixo y, a determina a amplitude de abertura da parábola e sua concavidade, entre outros.

Por fim, foram propostos os demais exercícios para que os alunos praticassem e tirassem as possíveis dúvidas. Isto possibilitou explanar a respeito do crescimento e decrescimento da função, domínio, imagem entre outros aspectos.

2.5 Módulo 3 – Geometria

2.5.1 Plano de aula do dia 30/06/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Polígonos, ângulos interno e externo de um polígono, área, perímetro, poliedros e volume.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conceito de geometria.

3.1 Objetivos Específicos

Ao se trabalhar com geometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar polígonos regulares e convexos, do mesmo modo, irregulares e não convexos;
- Classificar os polígonos quanto aos seus lados;
- Utilizar a fórmula para a soma de ângulos internos e externos;
- Calcular perímetro e área de uma figura plana;
- Resolver problemas que envolvam o conceito de perímetro e área;
- Utilizar a relação de Euler;
- Resolver problemas que envolvam o conceito de volume.

3.2 Recursos didáticos

Material do aluno, quadro, giz, folha milimetrada, régua e folha A4.

4. Procedimento Metodológico

Etapa 1

Neste período resolveremos os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

Etapa 2

Nesta etapa, passaremos um breve resumo sobre geometria no quadro:

A palavra "geometria" tem origem grega e sua tradução literal é: "medir a terra". É o estudo das formas dos objetos presentes na natureza, das posições ocupadas por esses objetos, das relações e das propriedades relativas a essas formas.

*A **geometria** é construída sobre objetos primitivos: ponto, reta, plano, espaço, entre outros. A partir destes objetos, é que são definidas as formas geométricas do plano, como: segmentos de reta, polígonos e ângulos.*

Em seguida, definiremos polígonos do seguinte modo:

"Os polígonos são figuras fechadas formadas por segmentos de reta, caracterizados pelos seguintes elementos: ângulos, vértices e diagonais. De acordo com o número de lados, a figura é nomeada."

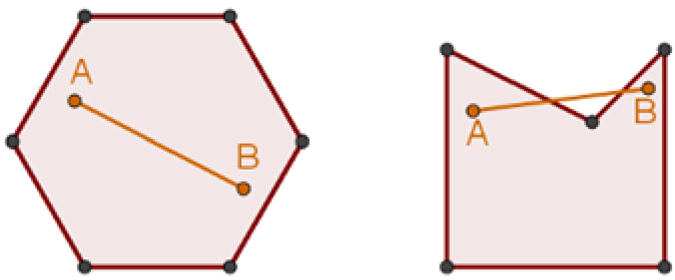
Explicaremos que:

- **Ângulo:** é a região do plano delimitada por duas semirretas que partem do mesmo ponto.
- **Vértices:** corresponde ao ponto de encontro dos segmentos de reta.
- **Diagonais:** são segmentos de reta que ligam dois de seus vértices não consecutivos, ou seja, um segmento de reta que passa pelo interior da figura.
- Um polígono é **regular** quando todas as **medidas** de seus **lados** e de seus **ângulos internos** são **equivalentes**.

Se os ângulos dos polígonos forem menores que 180º, ele será **convexo**. Caso tenha algum ângulo maior que 180º, será **não convexo** ou **côncavo**.

Com os conceitos principais definidos, reforçaremos, que em todo polígono regular, é possível escolher dois pontos A e B em seu interior, de modo que os dois pontos que formam o segmento de reta AB estão contido no polígono. Caso isso não ocorra, o polígono é não convexo. Geometricamente:

Figura 28: Figura convexa e figura nãoconvexa



Fonte: autores

Após a explanação deste conteúdo, pediremos aos alunos para resolverem o exercício 1 do material do aluno, que abordará a classificação dos polígonos, quanto a lados, vértices e ângulos.

Etapa 3

Abordaremos a soma dos ângulos internos e externos de polígonos convexos, propondo aos alunos a seguinte investigação que será projetada:

1. É possível obter um polígono com todos os ângulos retos? Lembrem-se: ângulo reto equivale a 90º;
2. Qual o valor da soma dos ângulos internos? E externos?
3. É um polígono regular?
4. É possível obter outro polígono inscrito? Isto é, o polígono formado é a junção de outros polígonos? Se sim, quais?
5. Qual a soma dos ângulos internos e externos deste polígono? É regular?
6. Com o polígono anterior, é possível obter outros polígonos através de sua junção? Cite 3 polígonos.
7. Determine a soma dos ângulos internos e externos desses polígonos e se são regulares.
8. Existe uma regularidade entre a soma dos ângulos internos e externos, dos polígonos vistos até o momento? Dica: monte uma tabela de classificação, quanto a lados, diagonais, ângulos internos e externos.
9. Determine a fórmula, utilizando a regularidade encontrada, para soma de ângulos internos de um polígono. O que acontece com o ângulo externo?
10. Determine a fórmula, para encontrar a quantidade de diagonais de um polígono.

Serão entregues réguas para auxiliar na construção e enquanto os alunos discutem e resolvem o questionário, passaremos em suas carteiras, observando e sanando quaisquer dúvidas existentes. Ao fim, socializaremos as respostas de cada grupo e formalizaremos as fórmulas no quadro, que são:

A soma dos ângulos internos é dada pela fórmula: $S = (n - 2)*180$, onde n é o número de lados;

O número de diagonais de um polígono depende do número de lados (n) e pode ser calculado por: $d = n(n-3)/2$.

Pediremos ainda, que resolvam o exercício 2 e 3 do material do aluno para fixação do conteúdo estudado.

Etapa 4

Começaremos esta etapa, pedindo para os alunos se reunirem em grupos e escreveremos as seguintes definições no quadro:

Área

É a medida de uma superfície.

Perímetro

É a medida do comprimento de um contorno.

Explicaremos que:

- A unidade de medida do cálculo do perímetro é a mesma unidade de medida de comprimento: metro, centímetro, quilômetro…
- A unidade de medida da área é: m^2, cm^2, e outros.
- Calculamos áreas de figuras planas e para cada figura existe uma fórmula ou modo para calcular a sua área.

Para explicitar estes conceitos, entregaremos folhas com a malha quadriculada e proporemos o seguinte para os grupos:

- Desenhe uma figura cujo perímetro é 24 unidades;
- Desenhe uma figura cuja área é 24 unidades quadradas;
- Crie um problema no qual você precise encontrar uma área;
- Crie um problema no qual você precise encontrar um perímetro;
- Duas figuras diferentes podem ter a mesma área mas diferentes perímetros? Explique sua resposta.

Ao fim, socializaremos, perguntando as respostas de cada grupo.

Etapa 5

Nesta etapa, deduziremos as fórmulas para o cálculo de área das figuras geométricas mais utilizadas no cotidiano. Explicando que:

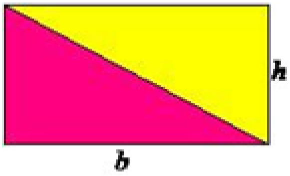
A área de um retângulo é dada pela medida do preenchimento de toda figura. Que pode ser obtido através da fórmula:

$$\text{Área} = b \times h$$

Onde “b” é denominado base e “h” é denominado como altura e cada um representa um lado do retângulo.

Para dedução da área do triângulo, desenharemos no quadro a seguinte figura:

Figura 29: Retângulo dividido em triângulos



Fonte: Google imagens

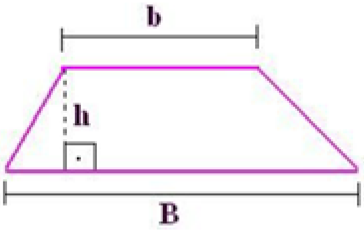
Indagaremos os alunos, quando ao cálculo da área do triângulo. Após isso, mostraremos que:

$$Área = \frac{bxh}{2}$$

Justificando, que a área do triângulo é a metade da área do retângulo.

Para o cálculo da área do trapézio, utilizaremos a seguinte figura:

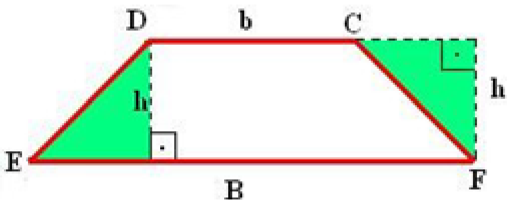
Figura 30: Trapézio



Fonte: Google imagens

Um trapézio é formado por uma base maior (B), por uma base menor (b) e por uma altura (h). Mostraremos que, para fazermos o cálculo da área do trapézio é preciso dividi-lo em dois triângulos. Primeiro, completando as alturas no trapézio:

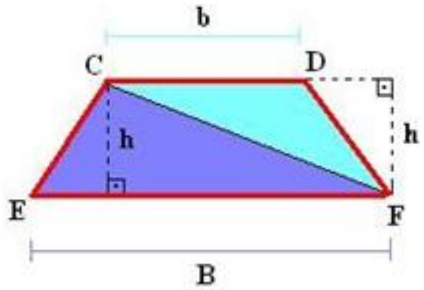
Figura 31: Complementando o trapézio



Fonte: Google imagens

E dividindo por dois triângulos:

Figura 32: Dividindo o trapézio em triângulos



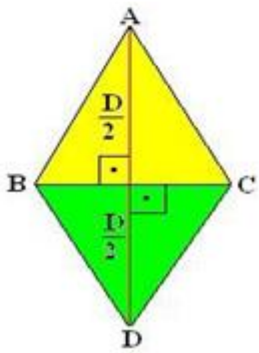
Fonte: Google imagens

Então obtemos, que a área do trapézio é igual a soma das áreas dos dois triângulos inscritos. Isto é:

$$Área = \frac{B * h + b * h}{2} = \frac{h * (B + b)}{2}$$

Para o cálculo da área do losango, utilizaremos a seguinte figura:

Figura 33: Dividindo o losango em triângulos



Fonte: Google imagens

Assim, como as outras figuras, possui triângulos inscritos. Logo, a área é a soma das áreas desse triângulos. Isto é:

$$Área = \frac{\frac{d * D}{2}}{2} + \frac{\frac{d * D}{2}}{2} = \frac{D * d}{2}$$

Após essas explanações, indagaremos os alunos sobre a área do quadrado que é um caso particular de retângulo. Por fim, formalizaremos que a área do quadrado é:

$$Área = L * L$$

Ao fim, pediremos aos alunos para resolverem o exercício 4 e 5 do material do aluno.

Etapa 6

Nesta etapa, abordaremos sucintamente, o conteúdo de poliedros, definindo que:

Os poliedros são figuras que fazem parte da geometria espacial, ou seja, possuem três dimensões (comprimento, largura e altura), formados de vértices, arestas e faces. As faces do poliedro são formadas por polígonos.

Explicaremos ainda:

· Podem ser classificados em convexos e côncavos. Um poliedro é convexo se qualquer segmento com extremidades dentro do poliedro estiver contido no poliedro. Um poliedro é côncavo se algum segmento com extremidades dentro do poliedro possuir pontos fora do poliedro.

· Um poliedro é chamado regular se, e somente se: É convexo; Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares e congruentes entre si e todos os vértices formam ângulos congruentes.

Como curiosidade, comentaremos com os alunos sobre os poliedros de Platão, que são regulares, e relacionados pelo filósofo com elementos da natureza, a saber: tetraedro (fogo), hexaedro (terra), octaedro (ar), dodecaedro (universo) e icosaedro (água).

Relação de Euler

É dada pela expressão:

$$\mathbf{V - A + F = 2}$$

em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Essa relação é válida para todo poliedro convexo, mas existem alguns poliedros não convexos para os quais ela também pode ser verificada. Dessa forma, dizemos que todo poliedro convexo é Euleriano (isso significa que para ele vale a relação de Euler), mas nem todo poliedro Euleriano é convexo.

Volume

O volume de sólidos refere-se à capacidade desse sólido e é calculado levando-se em consideração as suas três dimensões.

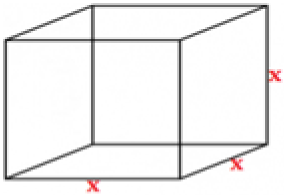
Os sólidos mais usados são:

CUBO

Um cubo, ou hexaedro regular, é aquele sólido geométrico onde as medidas da altura, largura e comprimento são iguais. A fórmula matemática utilizada para calcular o volume do cubo é a seguinte:

$$\boldsymbol{V = x^3}$$

Figura 34: Cubo



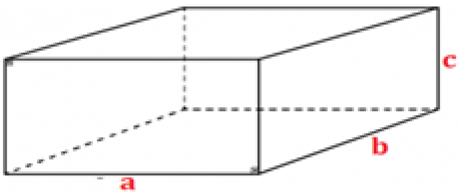
Fonte: autores

PARALELEPÍPEDO RETANGULAR

Paralelepípedo retangular é aquele sólido que possui 6 lados, sendo que os lados adjacentes formam ângulos de 90º entre si. A fórmula matemática utilizada para o calcular o volume do paralelepípedo regular é a seguinte:

$$\boldsymbol{V = a.b.c}$$

Figura 35: Paralelepípedo



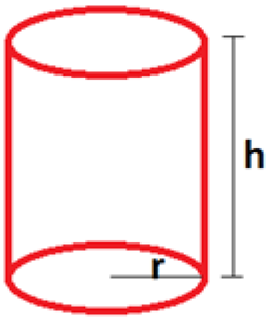
Fonte: autores

CILINDRO

É aquele sólido que possui duas bases paralelas e congruentes, e em formato de uma circunferência, e um corpo arredondado. A fórmula matemática utilizada para calcular o volume de um cilindro é a seguinte:

$$\boldsymbol{V = \pi . r^2 . h}$$

Figura 36: Cilindro



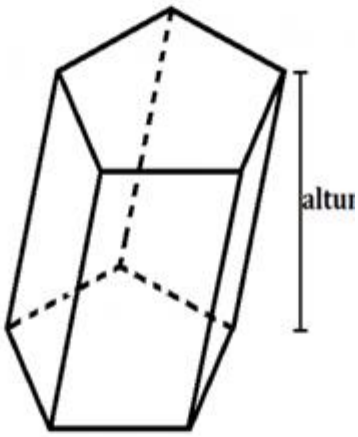
Fonte: Google imagens

PRISMA

Possui duas bases paralelas entre si, e todas as superfícies em formatos de polígonos. A fórmula matemática utilizada para calcular o volume de um prisma é a seguinte:

$$\boldsymbol{V = Ab \, . \, h}$$

Figura 37: Prisma



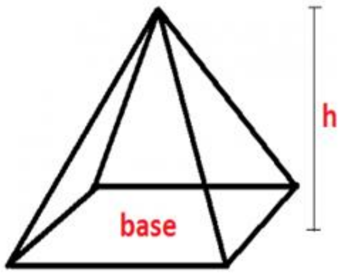
Fonte: autores

PIRÂMIDE

Possui uma base e um vértice fora do plano que contém esta base, além de todas as faces laterais em formato de triângulos. A fórmula matemática utilizada para calcular o volume de uma pirâmide é a seguinte:

$$\boldsymbol{V = \frac{A_b . h}{3}}$$

Figura 38: Pirâmide



Fonte: autores

Ao fim, pediremos para resolver o exercício 6 e 7 do material do aluno. Que abordará a relação de Euler e a definição de polígonos convexos. Posteriormente, corrigiremos no quadro junto com os alunos.

5. Avaliação

Será feita com base nas repostas dos alunos, durante as investigações sobre polígonos, área e perímetro.

6. Referências

CASTRO, José Victor Jardim. **Poliedros**. Disponível em <https://www.infoescola.com/geometria-espacial/poliedros/>. Acesso em: 23 de jun de 2018.

Geometria Espacial. Disponível em: <http://www.ibam-concursos.org.br/documento/geo-espacial.pdf>. Acesso em 23 de jun de 2018.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **O que é geometria?** - Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-geometria.htm>. Acesso em: 23 de jun de 2018.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Relação de Euler** – Mundo educação Disponível em <https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/relacao-euler.htm>. Acesso em: 23 de jun de 2018.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Polígonos** - Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/poligonos.htm>. Acesso em 21 de jun de 2018.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1. Ligue as características dos polígonos quanto as suas nomenclaturas

Pentágono

Decágono

Dodecágono

Icoságono

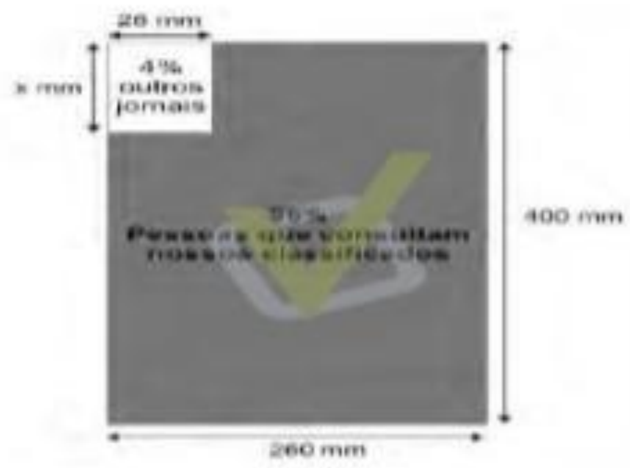
- 12 lados, 12 vértices e 12 ângulos internos.
- 20 lados, 20 vértices e 20 ângulos internos.
- 5 lados, 5 vértices e 5 ângulos internos.
- 10 lados, 10 vértices e 10 ângulos internos.

Em sequência responda, todos os polígonos eram convexos? Quais são regulares?

2. (Mackenzie – SP) Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Qual o número de diagonais deste polígono?

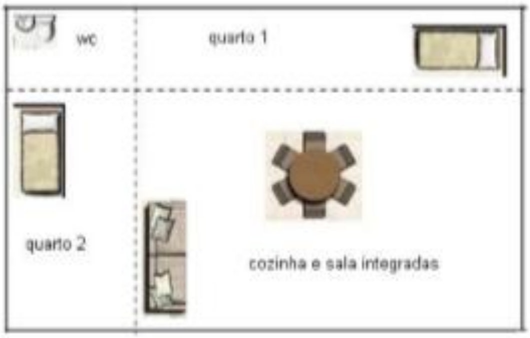
3. Num eneágono regular ABCDEFGHI, calcular a medida do ângulo GÂD.

4. (ENEM 2010) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, qual dever ser a medida do lado do retângulo que representa os 4%?

5. (UDESC 2010) O projeto de uma casa é apresentado em forma retangular e dividido em quatro cômodos, também retangulares, conforme ilustra a figura.



Sabendo que a área do banheiro (wc) é igual a 3 m² e que as áreas dos quartos 1 e 2 são, respectivamente, 9 m² e 8 m², então qual é a área total do projeto desta casa?

6 . (ENEM 2015) Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces. Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

7. (UF – PI) Em um poliedro convexo, o número de arestas excede o número de faces em 18. Qual o número de vértices desse poliedro?

2.5.1.1 Relatório

No sábado, dia 30 de Junho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o oitavo encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de introduzir o conceito de polígonos e algumas de suas particularidades.

Inicialmente, retomamos alguns conceitos trabalhados a respeito de função de primeiro e segundo grau, no intuito de sanar as dúvidas que os discentes expuseram, além de resolver um exercício que tratava a respeito de ambos os conceitos. Essa retomada, também, teve o objetivo de ilustrar que todos os conceitos trabalhados até então podem ser encontrados em um único problema ou exercício, de forma que se torna necessária sua consolidação.

Em sequência, expomos aos alunos a origem e significado da palavra Geometria, e os indagamos a pensar a respeito dos elementos necessários para se construir figuras geométricas como forma de retomar seus conhecimentos a respeito de geometria euclidiana. Assim obtemos como resposta que são necessários pontos, retas e planos, de modo as retas se interceptem em alguns formando delimitando uma região limitada e fechada no plano. Então expomos que estes três elementos são conceitos primitivos, ou seja, são admitidos sem definição.

A partir disto, os indagamos a respeito do que seria um polígono, o que gerou dúvida entre os discentes, pois os mesmos ainda não tinham consolidado o conceito de polígono. Então, explanamos que polígonos são figuras compostas por vértices, segmentos de reta e ângulos de forma que estes segmentos só se interceptem em suas extremidades.

Por conseguinte, tratamos de explicar a respeito da definição, utilizando de ilustrações, de ângulo, vértice e diagonais de um polígono. Feito isto, explanamos que um polígono é regular quando todos os seus ângulos internos são congruentes e os segmentos tem a mesma medida. Ainda explicamos que um polígono é dito convexo quando dado dois pontos, pertencentes à área delimitada pelo mesmo, se traçarmos um reta por com esses pontos então todos os pontos desta reta devem estar dentro do polígono ou na sua fronteira caso contrário, será côncavo.

A partir destas definições, fora proposto o exercício 1 do material, o qual consiste em um exercício de reforço de conceito em que os alunos devem relacionar as figuras desenhadas com suas características. Neste, os discentes não apresentaram grandes dificuldades, conseguindo resolve-lo rapidamente.

Em seguida, propomos aos discentes o seguinte questionário:

1. É possível obter um polígono com todos os ângulos retos? Lembrem-se: ângulo reto equivale a 90º;
2. Qual o valor da soma dos ângulos internos? E externos?
3. É um polígono regular?
4. É possível obter outro polígono inscrito? Isto é, o polígono formado é a junção de outros polígonos? Se sim, quais?
5. Qual a soma dos ângulos internos e externos deste polígono? É regular?
6. Com o polígono anterior, é possível obter outros polígonos através de sua junção? Cite 3 polígonos.
7. Determine a soma dos ângulos internos e externos desses polígonos e se são regulares.
8. Existe uma regularidade entre a soma dos ângulos internos e externos, dos polígonos vistos até o momento? Dica: monte uma tabela de classificação, quanto a lados, diagonais, ângulos internos e externos.
9. Determine a fórmula, utilizando a regularidade encontrada, para soma de ângulos internos de um polígono. O que acontece com o ângulo externo?
10. Determine a fórmula, para encontrar a quantidade de diagonais de um polígono.

Neste, os discentes apresentaram algumas dúvidas a respeito das maneiras em que se pode dividir um polígono, contudo dados alguns encaminhamentos eles conseguiram resolver a maior parte do questionário, ficando pendente a dedução da fórmula da soma dos ângulos internos e do número de diagonais, as quais foram deduzidas na lousa em conjunto.

Em sequência, explicamos que a área pode ser entendida como a medida de uma superfície, no caso dos polígonos uma superfície plana, e que o perímetro seria a medida do contorno da superfície. Então, propomos como dever extraclasse o seguinte questionário:

- Desenhe uma figura cujo perímetro é 24 unidades;
- Desenhe uma figura cuja área é 24 unidades quadradas;
- Determine, se possível, dois polígonos de mesma área e perímetro.

Por conseguinte, fora feita a dedução das expressões para cálculo da área dos polígonos mais conhecidos, como retângulo, losango, trapézio entre outros.

Para tal dedução utilizou-se da ideia de dividir a figura em triângulos e a partir da expressão da área do triângulo obter as demais.

Por fim, propomos aos discentes os demais exercícios do material, nos quais os mesmos apresentaram dificuldades na interpretação e manipulação das informações dadas pelo enunciado, contudo após alguns encaminhamentos os discentes conseguiram resolver grande parte dos problemas.

2.5.2 Plano de aula do dia 07/07/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Triângulo, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos alunos a apropriação do conhecimento a respeito de triângulos, as relações métricas no triângulo retângulo, Teorema de Pitágoras e Teorema de Tales.

3.1 Objetivos Específicos

Ao se trabalhar com geometria, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Definir um triângulo;
- Classificar os triângulos de acordo com o ângulo interno ou medida dos lados;
- Diferenciar congruência e semelhança;
- Identificar as relações métricas no triângulo;
- Pontos notáveis de um triângulo;
- Resolver problemas envolvendo conceitos a respeito de triângulos.

3.2 Recursos Didáticos

Material do aluno, quadro, giz e folha A4.

4. Procedimentos Metodológicos

ETAPA 1

Pretende-se neste período resolver os exercícios, propostos para casa na aula anterior, em que os discentes encontraram maior dificuldade seja de interpretação ou resolução.

ETAPA 2

Nesta etapa, pretende-se expor a vasta utilização da forma geométrica, conhecida por triângulo, no mundo em que vivemos. Para tal, indagaremos os discentes se conhecem objetos ou construções com elementos triangulares em sua composição no intuito de que percebam que algumas figuras geométricas são rígidas e outras não rígidas, ou seja, em algumas é possível se alterar os ângulos internos mantendo a mesma medida para os catetos e em outras isto não é possível.

Em sequência retomaremos a definição de triângulo:

Definição: Sejam os três pontos A, B, C, não colineares, chama-se triângulo ABC a parte do plano limitada pelo conjunto dos três segmentos AB, BC e CA.

Os três ângulos $C\hat{B}A$, $A\hat{C}B$e $B\hat{A}C$denominam-se ângulos do triângulo e os seus vértices, vértices do triângulo.

Os três segmentos AB, BC, CA, chamam-se lados do triângulo, o conjunto dos lados chama-se contorno do triângulo, e o segmento soma dos três lados perímetro.

O contorno de um triângulo divide o seu plano em duas partes: uma limitada, em que se encontram os pontos internos e outra ilimitada.

Denominam-se ângulos externos de um triângulo os adjacentes aos ângulos do triângulo.

Por conseguinte, diferenciaremos congruência e semelhança, e ainda, trataremos a respeito da classificação dos triângulos de acordo com a medida do lado e os ângulos internos, definindo-os e ilustrando conforme abaixo:

Definição: Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes são congruentes.

Definição: Diremos que dois triângulos são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais.

Para que os alunos se apropriem desta definição, iremos propor alguns exemplos na lousa para que os mesmos identifiquem se os triângulos são semelhantes ou congruentes.

Definição: Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais, e o terceiro lado é chamado de base.
Note que, em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.

Definição: Um triângulo é dito equilátero se tem três lados congruentes.
Note que, em um triângulo equilátero os ângulos internos são congruentes.

Definição: Um triângulo é dito escaleno se tem os três lados não congruentes, ou seja, os três lados com medidas diferentes.

Note que, em um triângulo escaleno os ângulos internos não são congruentes.

Definição: Um triângulo é dito acutângulo se tem os três ângulos internos agudos, ou seja, menores que 90º.

Definição: Um triângulo é dito retângulo se tem um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo interno igual a 90º.

Definição: Um triângulo é dito obtusângulo se tem um ângulo interno obtuso, ou seja, um ângulo interno maior que 90º e menor que 180º.

Além disso, denotaremos a seguinte definição a respeito dos ângulos internos de um triângulo:

Definição: Em qualquer triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180º. Se a, b e c expressam as medidas dos três ângulos internos de um triângulo qualquer, temos: a+b+c=180º.

ETAPA 3

Neste momento, pretendemos abordar as relações métricas no triângulo retângulo, para tal retomaremos o conceito de ângulos complementares e suplementares conforme abaixo:

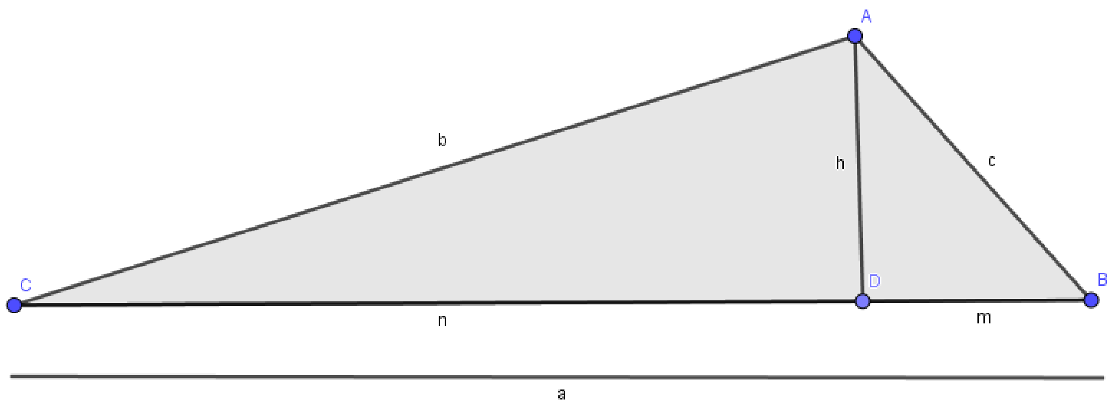
Definição: Dado dois ângulos, diremos que estes são suplementares se a sua soma for igual à 180º. E se sua soma for igual a 90º diremos que são ângulos complementares.

Para abordar a próxima definição, nos utilizaremos de ilustrações em que tomaremos valores arbitrários para os ângulos interno do triângulo e calcularemos o valor do ângulo externo, utilizando o conceito de ângulo suplementar.

Definição: O valor de um ângulo externo de um triângulo ABC é igual à soma dos ângulos internos do triângulo não adjacentes ao externo.

Dada a definição, construiremos um triângulo retângulo ABC com ângulo reto no vértice A. Traçaremos a altura AD do vértice A ao lado BC. Denotaremos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, $h = \overline{AD}$, $m = \overline{BD}$ e $n = \overline{DC}$, conforme figura abaixo.

Figura 39: Triângulo ABC



Fonte: autores

Como AD é perpendicular à BC, então, os triângulos ADB e ADC são retângulos. Como $\hat{B} + \hat{C} = 90º$ e $\hat{B} + B\hat{A}D = 90º$, então, $B\hat{A}D = \hat{C}$.

Como também $D\hat{A}C + \hat{C} = 90º$, então, $D\hat{A}C = \hat{B}$.

Os triângulos ADB e CDA são, portanto, ambos semelhantes ao triângulo ABC e são também semelhantes entre si. Destas semelhanças, podemos deduzir várias relações entre as medidas $a, b, c, h, m\ e\ n$ acima mencionadas.

Por exemplo, a semelhança entre ADB e CDA é a que leva A em C, B em A e D em D. Como consequência desta semelhança, tem-se:

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Da última igualdade, deduz-se que:

$$h^2 = mn$$

Ou seja, em um triângulo retângulo, a altura do vértice o ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Outra relação é dada pela semelhança entre ADC e BAC, que são triângulos retângulos com um ângulo agudo em comum, donde temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow b^2 = n * a$$

Do mesmo modo, sendo ADB e BAC semelhantes temos:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow c^2 = m * a$$

A partir disto, podemos dizer que o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura, visto que:

$$b^2 = a * n$$

$$c^2 = a * m$$

$$b^2 * c^2 = (a * n) * (a * m)$$

$$b^2 * c^2 = a^2 * m * n$$

$$b^2 * c^2 = a^2 * h^2$$

$$\sqrt{(b * c)^2} = \sqrt{(a * h)^2}$$

$$b * c = a * h$$

ETAPA 4

Pretendemos, nesta etapa, determinar a relação de Pitágoras:

Teorema (de Pitágoras): Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para tal vamos nos valer das relações determinadas na etapa anterior, conforme segue:

$$b^2 = a * n$$

$$c^2 = a * m$$

$$b^2 + c^2 = (a * n) + (a * m)$$

$$b^2 + c^2 = a * (n + m)$$

$$b^2 + c^2 = a * a$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Disto, podemos inferir que o quadrado de um cateto é igual ao quadrado da hipotenusa menos o quadrado do outro cateto.

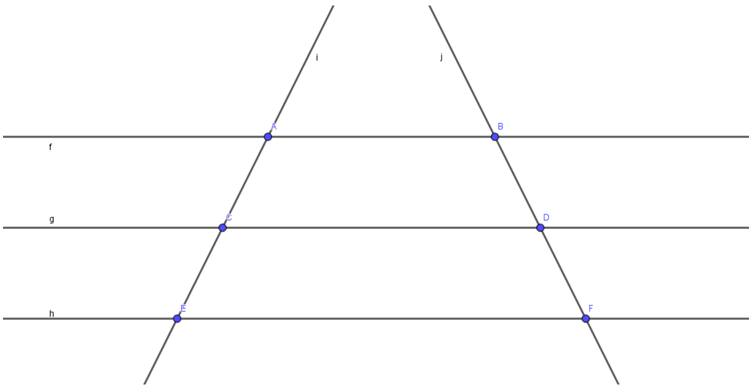
Feito isto, iremos propor aos discentes os exercícios 1 ao 4 do material do aluno, os quais envolvem os conceitos abordados até o momento.

ETAPA 5

Nesta etapa iremos abordar o Teorema de Tales, o qual enuncia que:

Teorema (de Tales): Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de retas paralelas distintas sobre duas retas transversais são proporcionais.

Figura 40: Representação geométrica do teorema de Tales



Fonte: autores

A partir da definição, exemplificaremos geometricamente a situação e posteriormente iremos propor o problema 5 e 6 do material do aluno.

ETAPA 6

Nesta etapa pretendemos abordar algumas características dos triângulos, para tal retomaremos, utilizando-se da definição e ilustrações na lousa, os seguintes conceitos:

Definição: Ceviana é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.
Definição: Mediana é toda ceviana que tem uma extremidade no ponto médio de um lado.
Definição: Bissetriz interna é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes.
Definição: Altura é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte.

Pontos notáveis de um triângulo

Para qualquer triângulo valem as seguintes propriedades:

- As três medianas concorrem num mesmo ponto, denominado Baricentro, este divide cada mediana na razão de 2 para 1, a partir do vértice.
- As três bissetrizes internas concorrem num mesmo ponto, denominado Incentro, este é o centro da circunferência inscrita num triângulo.
- As retas suportes das três alturas concorrem num mesmo ponto, denominado Ortocentro, este pode ser interno, externo ou coincidente com um vértice.
- As mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto, denominado Circuncentro, este é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

Dadas essas definições iremos propor o problema 7 do material do aluno, o qual envolve os conceitos trabalhados.

5. Avaliação

A avaliação será feita no decorrer da aula observando as resoluções apresentadas pelos discentes em relação aos problemas propostos.

6. Referências

BARBOSA, J. L. M. Congruência. In: BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11º.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. cap. 4, p. 55-73.

BARBOSA, J. L. M. Semelhança de Triângulos. In: BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11º.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. cap. 7, p. 127-147.

Conexões com a matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. 2º. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 1.

GERÔNIMO, J. R. **Geometria Euclidiana plana**: um estudo com Cabri-géomètre / João Roberto Gerônimo, Rui Marcos de Oliveira Barros, Valdeni Soliani Franco. Maringá: Eduem, 2007.

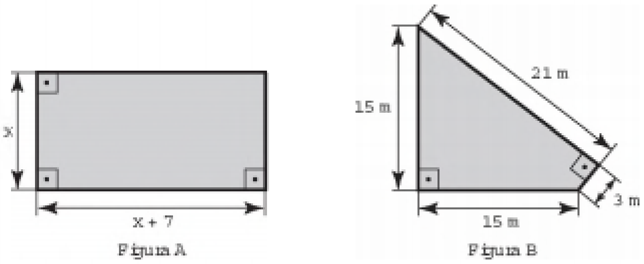
GIOVANNI, J. J. R. **A conquista da matemática**, 7º ano / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. – Ed. Renovada. – São Paula: FDT, 2009.

PUTNOKI, J. C. Triângulos: Cevianas e Pontos Notáveis de um triângulo. In: PUTNOKI, José Carlos. **Elementos de Geometria & Desenho Geométrico**. 4º. ed. São Paulo: Scipione, 1993. cap. 16, p. 143-147. v. 1.

Lista de exercícios

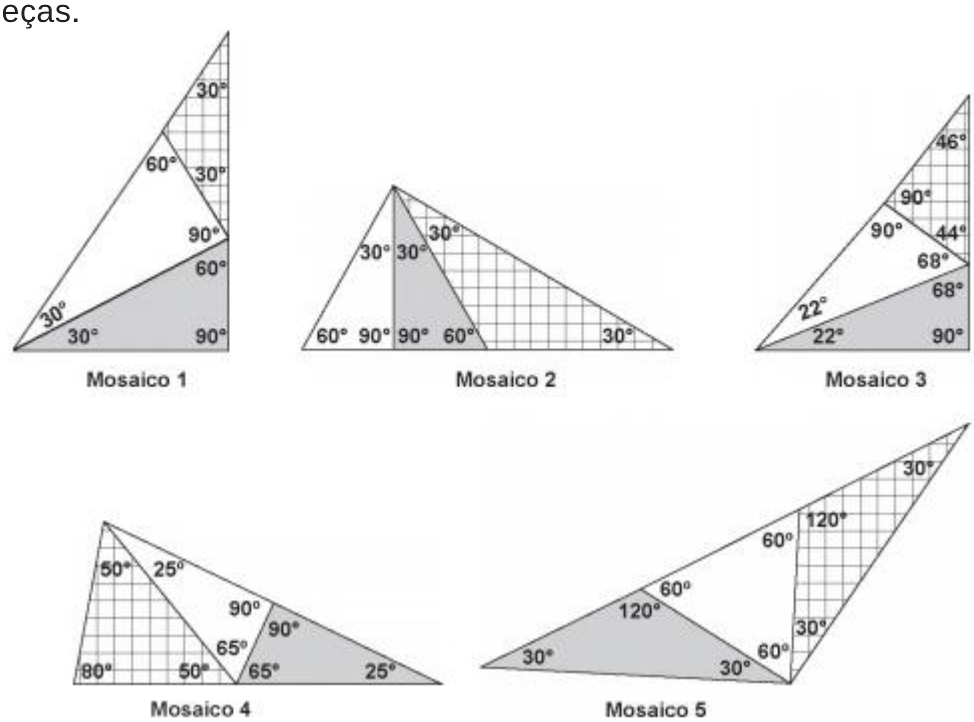
MATERIAL DO ALUNO

1- Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7m maior do que a largura.



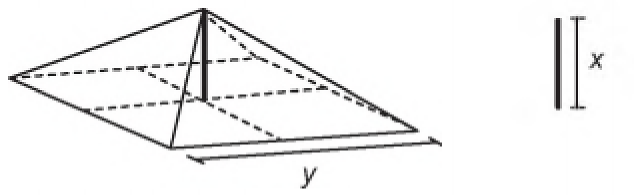
Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular. Determine as medidas deste terreno para satisfazer as necessidades do filho mais novo.

2- Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. Afigura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



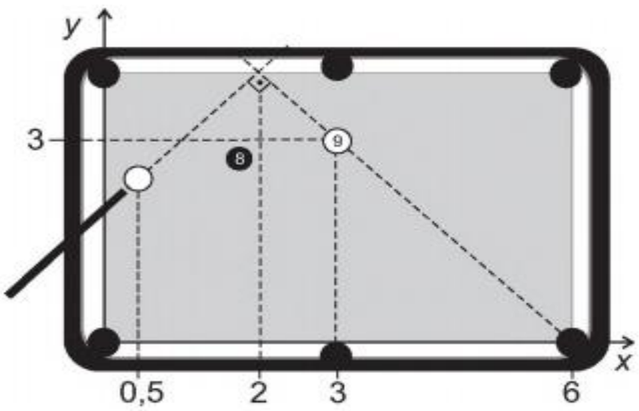
Determine nas figuras, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir.

3- A cobertura de uma tenda de lona tem formato de uma pirâmide de base quadrada e é formada usando quatro triângulos isósceles de base *y*. A sustentação da cobertura é feita por uma haste de medida *x.* Para saber quanto de lona deve ser comprado, deve-se calcular a área da superfície da cobertura da tenda.



Determine a expressão da área da superfície da cobertura da tenda, em função de *y* e *x*.

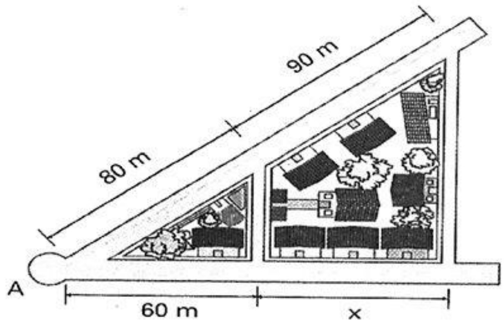
4- Em sua vez de jogar, um jogador precisa dar uma tacada na bola branca, de forma a acertar a bola 9 e fazê-la cair em uma das caçapas de uma mesa de bilhar. Como a bola 8 encontra-se entre a bola branca e a bola 9, esse jogador adota a estratégia de dar uma tacada na bola branca em direção a uma das laterais da mesa, de forma que, ao rebater, ela saia em uma trajetória retilínea, formando um ângulo de 90º com a trajetória da tacada, conforme ilustrado na figura.



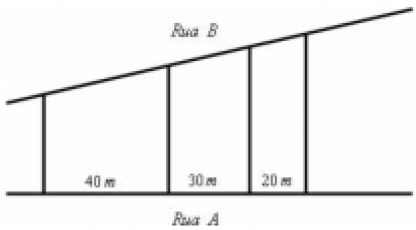
Com essa estratégia, o jogador conseguiu encaçapar a bola 9. Considere um sistema cartesiano de eixos sobre o plano da mesa, no qual o ponto de contato da bola com a mesa define sua posição nesse sistema. As coordenadas do ponto que representa a bola 9 são (3 ; 3), o centro da caçapa de destino tem coordenadas (6 ; 0) e a abscissa da bola branca é 0,5, como representados na figura.

Se a estratégia deu certo, determine a ordenada da posição original da bola branca.

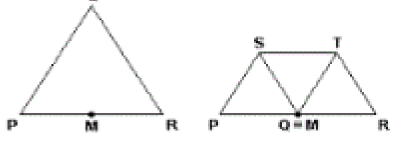
5- A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas tem 80 m e 90 m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual o comprimento do outro quarteirão ?



6- Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?



7- Um pedaço de papel tem a forma de um triângulo equilátero PQR, com 7cm de lado, sendo M o ponto médio do lado PR:



Dobra-se o papel de modo que os pontos Q e M coincidam, conforme ilustrado acima. Determine o perímetro do trapézio PSTR, em cm.

2.5.2.1 Relatório

No sábado, dia 07 de Julho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o nono encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de explorar algumas particularidades dos triângulos.

Inicialmente retomamos os conteúdos a respeito de polígonos que fora trabalhado no encontro anterior para sanar as dúvidas apresentadas pelos discentes e também para introduzir o conceito de volume. Este último fora apresentado de forma intuitiva, para tal indagamos os alunos a respeito do que acontece com a figura se ao se multiplicar sua área por 1 unidade, assim após alguns encaminhamentos os discentes perceberam que a figura passou do bidimensional para o tridimensional e o valor obtido era o volume.

Posteriormente, propomos aos alunos a pensar a respeito da utilização da figura geométrica nomeada por triângulo no dia a dia, em construções, equipamentos, etc. Com isto, percebemos que aparentemente a turma não relaciona os conteúdos com os objetos ou ações do seu dia a dia, pois apenas uma minoria apresentou exemplos a respeito da utilização de triângulos. Contudo demos sequência a intuição, indagamos a respeito das características que favorecem a utilização do triângulo em também aos demais polígonos.

Com isto conseguimos expor que o triângulo é uma figura rígida, ou seja, não é possível alterar a medida de seus ângulos internos sem alterar a medida dos lados, enquanto que, com quadriláteros ou polígonos em geral acontece o contrário. Feito isto, definimos o que é um triângulo e diferenciamos congruência de semelhança utilizando-se de ilustrações na lousa a partir da definição apresentada, ainda, classificamos os triângulos segundo a medida de seus lados e segundo a medida de seus ângulos internos.

Em sequência, utilizando um triângulo de papel expomos e enunciamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180º, para exemplificar ainda mais esta ideia tomamos um quadrado, o dividimos traçando uma de suas diagonais de forma a obter dois triângulos, como a diagonal do quadrado coincide com a bissetriz dos ângulos internos temos que cada triângulo tem 180º.

Então propomos aos discentes o segundo exercício do material envolvendo o conteúdo abordado, no qual em geral não houve dúvidas.

Por conseguinte, definimos que se a soma de dois ângulos for igual a 180º estes são suplementares, e se for igual a 90º dizemos que são complementares, expomos também que a altura de um triângulo é a medida do segmento de reta que sai de um vértice e cai perpendicular a reta suporte do cateto oposto a este vértice. Ainda provamos que a medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos do triângulo não adjacentes ao externo a ser calculado.

A partir destes conceitos, principalmente de semelhança de triângulos, obtivemos na lousa, em conjunto com os discentes, as relações métricas no triângulo retângulo e o importante Teorema de Pitágoras. Então, propomos aos discentes a realização das atividades 1, 3 e 4 do material do aluno.

2.5.3 Plano de aula do dia 14/07/2018

PLANO DE AULA

1. Conteúdo

Conceitos a respeito de circunferência, área e perímetro.

2. Duração

Um encontro com duração de 4 horas.

3. Objetivo Geral

Promover aos discentes a apropriação do conceito de circunferência, círculo, área e perímetro.

3.1 Objetivos Específicos

Ao se trabalhar com circunferência e círculos, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar uma circunferência;
- Relacionar a área de uma circunferência com a de polígonos com vários lados e a capacidade de um prisma com a de um cilindro;
- Relacionar polígonos inscritos e circunscritos e suas áreas;
- Resolver problemas e situações que envolvam circunferências e cilindros.

3.2. Recursos Didáticos

Material do aluno, quadro, giz, folha A4, régua, tampas plásticas e barbante.

4. Procedimentos Metodológicos

ETAPA 1

Nesta etapa retomaremos os exercícios trabalhados na aula anterior e resolveremos os problemas que os alunos apresentaram dúvidas.

ETAPA 2

Posteriormente, entregaremos barbantes, réguas e os objetos circulares para os alunos e passaremos a seguintes instruções:

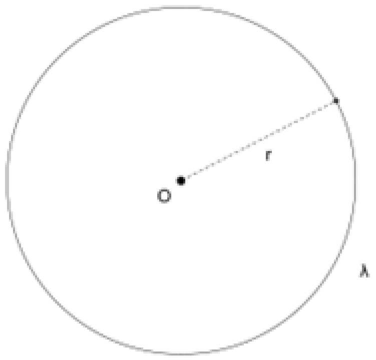
1. Os alunos devem contornar a circunferência do objeto com o barbante e depois disto devem usar a régua para verificar a medida, aproximada, no barbante.
2. Será medido o diâmetro do mesmo, com isso devem fazer a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, assim descobrindo uma aproximação para o valor π.

Com essa atividade, queremos mostrar aos alunos a origem do número irracional π se foi obtido através da circunferência.

ETAPA 3

Após, mostraremos que a circunferência é formada por todos os pontos que distam um comprimento *r* de um ponto fixo *O.* Sendo *r* o raio da circunferência e *O* seu centro.

Figura 41: Circunferência



Fonte: autores

Além disso, definiremos: corda, diâmetro e raio:

- Corda: É um segmento cujas extremidades pertencem à circunferência.
- Diâmetro: É a corda que passa pelo centro, sendo o dobro do raio.
- Raio: É o segmento com uma extremidade no centro e outra em qualquer ponto da circunferência.

Para definir a área de uma circunferência, utilizaremos duas abordagens, sendo elas:

1º) Utilizando o Geogebra mostraremos que a circunferência é o polígono com maior área a partir da partição em triângulos e dividindo-a em duas partes sobrepostas, que quando esticada, sua área pode ser calculada como a de um retângulo.

2º) Particionaremos uma circunferência em *n* triângulos, até que o número de bases destes triângulos seja tão próximo ao do comprimento desta circunferência, com isso somaremos as áreas destes triângulos, como são n triângulos, somaríamos *n* vezes, obtendo$\frac{n \times b \times H}{2}$. Mas $n \times b = 2 \times \pi \times r$as bases estão tão próximas do comprimento da circunferência, ainda a altura dos triângulos é o próprio raio da circunferência, por fim chegaremos que:

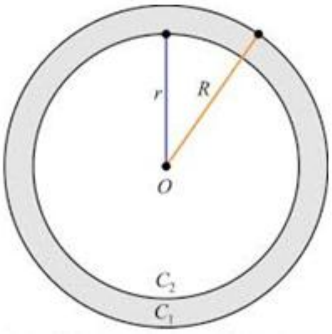
$$\frac{2 \times \pi \times r \times H}{2} = \pi \times r^2, pois H = r.$$

Disto apresentaremos as fórmulas da área, que foi mostrada anteriormente, e a do comprimento.

ETAPA 4

Área de coroa circular: Esta a área pode ser calculada através da diferença entre as áreas totais, isto é, área do círculo maior menos a área do menor. Quando duas ou mais circunferências possuem o mesmo centro, são denominadas concêntricas.

Figura 42: Coroa circular



Fonte: autores

Considerado R>r, temos que a diferença é denominada por:

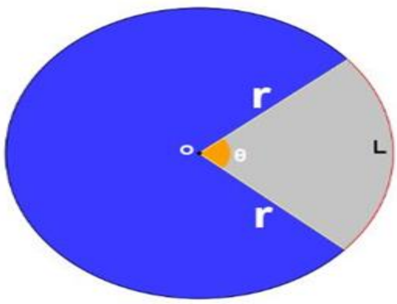
$AC = (\pi \times R^2) - (\pi \times r^2)$, evidenciando o π, temos que,

$AC = \pi(R^2 - r^2)$

Com isto, pediremos para que resolvam os exercícios 1, 2 e 3.

Área do setor circular: O círculo pode ser dividido em infinitas partes, as quais recebem o nome de arcos. Estes são determinados de acordo com a medida do ângulo central.

Figura 43: Setor circular



Fonte: autores

Sendo delimitada pelos seus raios, *r,* de com centro *O* e ângulo central ϴ. A fórmula de sua área é dada por:

$$AS = \frac{\pi*\Theta*r^2}{360°}$$

Para saber o comprimento, devemos utilizar uma regra de três dada por:

$$360° \to 2\pi r$$

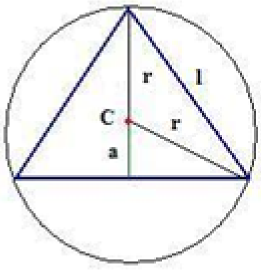
$$\Theta - -- \to L$$

Em que temos que $L = \frac{2*\pi*r*\Theta}{360°} = \frac{\pi*\Theta*r}{180°}$.

ETAPA 5

Polígonos Inscritos: Dizemos que um polígono está **inscrito** numa circunferência quando os seus vértices pertencem essa circunferência, neste caso trabalharemos com polígonos regulares.

Figura 44: Polígono inscrito na circunferência



Fonte: autores

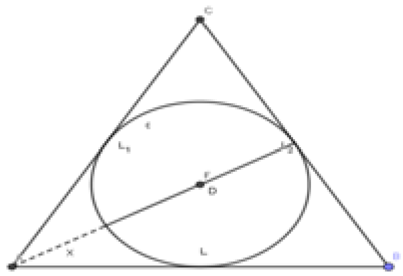
Fazendo em sala de aula a apresentação de cada elemento do triângulo inscrito, passaremos que as fórmulas de lado e área, respectivamente, são dadas por:

$$L = \sqrt{3} \times r$$

$$A = \frac{3 \times r \times L}{4}$$

Polígono Circunscrito: Um polígono circunscrito a uma circunferência é o que possui seus lados tangentes à circunferência. Ao mesmo tempo, dizemos que esta circunferência está inscrita no polígono. Que é dado por:

Figura 45: Polígono circunscrito



Fonte: autores

Temos que o é equilátero e a circunferência é regular, para isto, temos que a altura é dada por:

$$h = \frac{L \times \sqrt{3}}{3}$$

Temos que a área de um triângulo é dada por:

$$A = L^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

E temos que seu lado é dado pela seguinte fórmula:

$$\mathrm{L} = 2\mathrm{r} \times \sqrt{3}$$

ETAPA 6

Definição: Considere dois planos paralelos *s* e *t,* uma reta *x* concorrente a esses planos e um círculo de centro *O* e o raio *r* em *s.* Denomina-se cilindro circular ou simplesmente cilindro a reunião de todos os segmentos de reta congruentes entre si e paralelos a *s* com uma extremidade no círculo dado e a outra no plano *t.*

Elementos de um cilindro:

1. Bases: São círculos paralelos de centro *O* e *O'* e raio *r.*
2. Altura: É a distância entre os planos que contêm as bases.
3. Eixo: É a reta que contém os centros dos círculos das bases. Nesse caso é o segmento *OO'.*
4. Geratriz: É cada segmento de reta paralela ao eixo com extremidades nos pontos da circunferência das bases.
5. Superfície lateral: É a reunião de todas as geratrizes do cilindro.

Cilindro reto: É aquele cujo eixo é perpendicular aos planos que contêm as bases. Também conhecido como Cilindro de Revolução.

Cilindro oblíquo: É aquele cujo eixo é oblíquo aos planos que contêm as bases.

- Área da base: $Ab = \pi r^2$
- Área Lateral: É a superfície lateral de um cilindro planificado, dado por:

$$Al = 2\pi r \times h$$

- Área total: É a reunião da superfície lateral com as bases, dada por:

$$At = Al + 2 \times Ab$$

- Volume: $V = Ab \times h$

5. Avaliação

A avaliação será feita durante a resolução dos problemas propostos no decorrer da aula e a partir das indagações feitas aos discentes.

6. Referências

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e realidade : 9° ano.** 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; PARENTE, Eduardo. **Aprendendo matemática.** São Paulo: Ftd, 2007.

Projeto Araribá: **matemática**. São Paulo: Moderna, 2006. Editora Responsável Juliane Matsubara Barroso.

Lista de exercícios

MATERIAL DO ALUNO

1) Determine o que se pede:

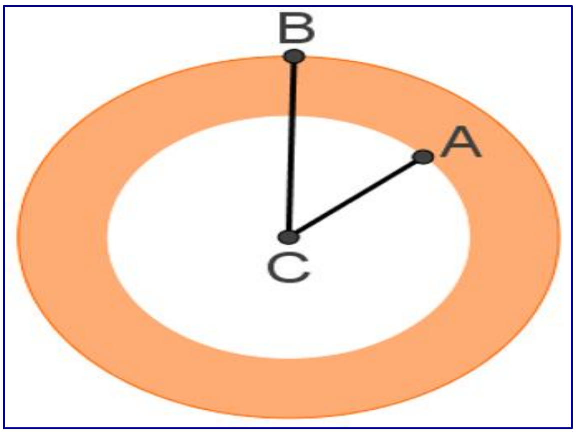
   a) Calcule o comprimento de uma circunferência de raio r = 10 cm.

   b) Calcule o comprimento de uma circunferência cujo diâmetro mede 12 cm.

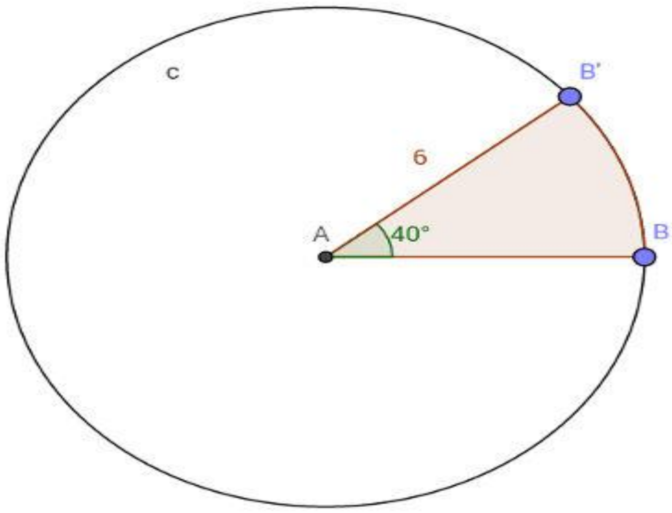
   c) Calcule o raio de uma circunferência cujo comprimento é 120 m.

2) Uma menina brinca com um aro de 1 m de diâmetro. Que distância percorreu a menina ao dar 100 voltas com o aro?

3) Qual a área da parte laranja da figura abaixo, sabendo que ela é formada por dois círculos concêntricos, um de raio 10 cm e outro de raio 15 cm? Considere $\pi = 3,14$.



4) Calcule a área da região sombreada na figura a seguir:



61. **(2010 - N2Q6 - 1ª fase)** Na figura as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a 4 cm. A distância entre os pontos R e S é 1 cm. Qual é o perímetro do retângulo?

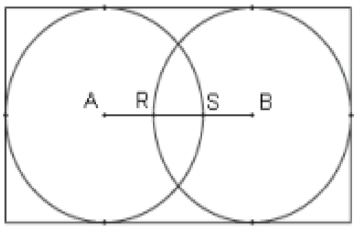
(a) 16 cm

(b) 18 cm

(c) 20 cm

(d) 22 cm

(e) 24 cm



6) Calcule o raio do círculo circunscrito a um triângulo equilátero de $6\sqrt{3}$cm de perímetro?

7) Um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência tem perímetro valendo $5\sqrt{3}$m. Calcule o raio a da circunferência, o lado e a área do triângulo equilátero.

2.5.3.1 Relatório

No sábado, dia 14 de Julho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar o décimo e último encontro do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um Enfoque à Área de Matemática – Promat, no período matutino na Universidade Estadual do Oeste do Paraná. No dia em questão, foram desenvolvidas atividades com o objetivo de explorar algumas particularidades da circunferência.

No início da aula foi passado as partes finais da aula anterior, as quais abordavam o Teorema de Tales e pontos notáveis do triângulo, todos passados em quadro, de forma para que o aluno pudesse ver o que estava acontecendo no triângulo e quando perguntamos sobre a lista de exercício, para ver se ficou dúvida, nenhum aluno se manifestou.

Após as explicações iniciais, fizemos uma dinâmica com os alunos sobre o número pi, na qual deveriam utilizar um barbante e régua para a medição de vários círculos, medindo seu comprimento, o mais próximo possível, e diâmetro, com essas medidas já feitas, deveriam fazer a razão do comprimento pelo diâmetro para encontrar aproximadamente o pi. Os alunos tiveram dificuldade na parte da medição do comprimento, pois com o barbante era difícil estimar seu valor correto, alguns faziam aproximações para números inteiros e outros para decimais, quando foi feito no quadro uma tabela para discutir sobre o que tinham encontrado, houve divergências em alguns valores o que levou a números diferentes para pi. Foi mostrado um vídeo que abordava a questão de que se um barbante fosse passado em volta de uma laranja e da Terra teriam a mesma espessura, mas poucos alunos entenderam o conceito que estava sendo transmitido com o vídeo.

Uma dificuldade notada foi a questão das fórmulas da circunferência, também houve uma confusão na parte da explicação do raio e diâmetro, pois os alunos não conseguiam visualizar que um era o todo e outro a metade do todo, mas ao final e repetindo várias vezes conseguiram identificar o que cada um significava. Na apresentação da área da coroa, na qual temos duas circunferências sobrepostas, sendo uma de área maior e outra menor, houve uma certa dificuldade para entender a expressão algébrica dela. Ao encaminhar dos exercícios, os alunos perguntaram se o pi era um número que variava, com isto um dos professores ressaltou a atividade feita anteriormente e colocou na lousa o valor aproximado do pi, alguns conseguiram fazer os problemas de área e cumprimento, mas outros não sabiam como aplicar a fórmula e ficavam com mais dúvidas. Na parte de área de setor, houve um entendimento melhor dos alunos, pois eles conseguiram distinguir cada uma das incógnitas e realizar o exercício, pois já estava reforçado o que era o pi e o raio.

Como era o último dia de aula e tínhamos a socialização com os alunos as partes de polígonos inscritos e circunscritos ficou de forma mais rápida, apresentamos apenas a figura do triângulo, pois todo polígono pode ser decomposto em um triângulo, e com isto apresentamos as fórmulas que precisariam para aplicarem quando fizessem o exercício.

2.6 PROMAT - Considerações

O PROMAT beneficiou todos os participantes. Os discentes tiveram a possibilidade de estar na frente da sala de aula como docente. Em especial no nosso grupo, foi satisfatório saber que estávamos ajudando os alunos, no aprendizado e produção de conhecimento sobre a matemática. A parte de planejamento de aulas, possibilitou-nos o aprofundamento crítico e o desenvolvimento em relação a metodologia que iria ser trabalhada.

O aprendizado obtido, como docente, proporcionou-nos várias reflexões durante este trajeto. Os pontos fortes e fracos, individualmente de cada integrante do grupo, o enfrentamento de obstáculos epistemológicos. Proporcionou-nos ainda, a visão de unicidade acerca dos alunos, as suas etapas para o aprendizado concreto e suas dificuldades ao longo do caminho.

A partir dessa possibilidade, concluímos e averiguamos a importância de tal projeto. Junto aos alunos, crescemos e enfrentamos as dificuldades em sala de aula. Pudemos, visualizar previamente, como seria o meio em que escolhemos participar profissionalmente. Contudo, conscientes que haveriam mudanças, relacionadas a colegas, alunos e escolas.

Certificamos, acima de tudo, que como futuros educadores devemos mostrar que a matemática não é só mais um conteúdo a ser mostrado na escola, deve ser ensinada para agregar na vida do aluno.

3. PROJETO DIA NACIONAL DA MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

Este projeto tem por objetivo descrever as atividades a serem desenvolvidas em comemoração ao Dia Nacional da Matemática, elaborado como trabalho complementar de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática – Estágio Supervisionado I - do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná.

O projeto se baseia na elaboração e aplicação de atividades diferenciadas envolvendo a matemática, para turmas de sétimo ano do período vespertino. As atividades neste descritas serão desenvolvidas no Colégio Estadual Ieda Baggio Mayer e têm por finalidade divulgar o Dia Nacional da Matemática, bem como seus motivos, além de promover o interesse dos alunos pela disciplina com o desenvolvimento de atividades diferenciadas para uma abordagem de alguns conteúdos matemáticos.

A elaboração deste se justifica pela necessidade, cada vez maior, de atualizar os modelos de ensino vigentes, buscando resgatar o interesse, cada vez mais escasso, dos alunos pela matemática. Além disto, pretende-se divulgar o dia 06 de maio como o Dia Nacional da Matemática, apresentando a lei n° 12.835, sancionada em 26 de junho de 2013, que instituiu oficialmente esta data e a relação desta com a história de Malba Tahan. Vale ressaltar que, a realização deste projeto estava prevista para o dia 06 de maio, no entanto, devido a complicações de logística foi adiado para o dia 19 de Junho, simbolizando o Dia Nacional da Matemática.

Segundo D'Ambrosio (s.d., p. 1), "há um risco de desaparecimento da Matemática, como vem sendo praticada atualmente no currículo, como disciplina autônoma dos sistemas escolares, pois ela se mostra, na sua maior parte, obsoleta, inútil e desinteressante". Ou seja, é importante que haja não só uma preocupação por parte dos educadores em reverter esta situação, como também a elaboração de novos projetos de ensino e metodologias inovadoras para trabalhar a matemática de forma mais significativa, resgatando sua essência e relacionando-a com a vivência do aluno, tanto na escola como na sociedade em geral.

Em vista desta necessidade de inovação, o Dia Nacional da Matemática pode ser uma excelente oportunidade para divulgar novas ideias e estimular a implantação de novas práticas de ensino através da utilização de mídias e de sua contextualização.

Objetivos:

Objetivos Gerais:

- Divulgar o Dia Nacional da Matemática e promover a integração dos alunos;
- Elencar fatos históricos importantes, estimulando os alunos a relacionar a história da matemática com sua aplicação na atualidade;
- Realizar atividades lúdicas e dinâmicas envolvendo conteúdos de matemática;
- Promover uma maior interação entre os alunos e o conteúdo com o trabalho em equipe;
- Progredir as habilidades de comunicação;
- Propiciar situações desafiadoras que estimulem a curiosidade e consequentemente provoquem a aprendizagem.

Objetivos específicos:

Com a realização do projeto em questão, pretende-se que os alunos possam

- Obter o conhecimento da existência do Dia Nacional da Matemática, da lei federal que o rege e a relação desta data com a história de Malba Tahan;
- Conhecer um pouco da história de Malba Tahan e suas publicações, bem como seus principais contos e livros;
- Ter um momento de recreação, trabalhando a matemática de forma divertida e interessante.

PÚBLICO ALVO: 7º ano do ensino fundamental II

O projeto baseia-se na realização de algumas atividades relacionadas com o Dia Nacional da Matemática e alguns jogos e desafios. Tais atividades serão desenvolvidas com os alunos dos anos do período vespertino do Colégio. Desta forma, almeja-se selecionar conceitos que estejam em harmonia com os níveis de conhecimento dos alunos aos quais pretendemos atingir, recordando em especial o conteúdo visto por eles no trimestre anterior.

Metodologia

A realização do projeto aqui proposto perdurou por 2 dias no período vespertino, em que os alunos foram divididos em equipes e levados a um espaço apropriado da instituição (preferencialmente a quadra de esportes), durante o horário da aula de matemática, no qual se fará uma breve explanação a respeito dos objetivos da gincana, como comemorar o dia nacional de Matemática, socializar e revisar alguns conceitos matemáticos. Posteriormente serão realizadas as seguintes atividades:

ETAPA 1: Apresentação do projeto

Inicialmente, formar-se-á um semicírculo para que os estudantes ouçam uma explicação prévia a respeito da comemoração do Dia Nacional da Matemática, a fim de que entendam a importância desta data como motivo principal da realização deste projeto.

Para tal, indagaremos os alunos se têm conhecimento a respeito desta data e de sua história. Em sequência explanaremos, que após um longo tramite o projeto de lei nº12.835 foi sancionado em 26 de Junho de 2013. Essa lei instituiu oficialmente o dia 06 de Maio, data de nascimento do matemático, escritor e educador Malba Tahan, como Dia Nacional da Matemática. A determinação desta lei objetiva-se a incentivar a promoção de atividades educativas e culturais na referida data.

O dia da matemática é uma data comemorada informalmente há muitos anos pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. A data de sua comemoração é em homenagem ao matemático, escritor e educador brasileiro Júlio Cezar de Mello de Souza, mais conhecido como Malba Tahan, que nasceu no dia 06 de maio de 1895, no Rio de Janeiro. Júlio começou a lecionar quando tinha apenas 18 anos. Formou-se em Engenharia civil, mas devido ao seu grande amor pela escrita e pela matemática nunca exerceu esta profissão. Juntando suas duas grandes paixões, começou a escrever histórias que envolviam matemática e publicou-as em um jornal local usando um pseudônimo para assinar suas obras, por ter medo de não serem aceitas pela sociedade em geral.

Júlio Cezar era um grande admirador da cultura árabe, e por este motivo, passou a incluí-la em suas obras e a usar um pseudônimo árabe também: Ali Iezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan. Após ter escrito diversos contos assinados com este pseudônimo, em 1925, Júlio pode lançar seu primeiro livro: contos de Malba Tahan. Com a fama deste livro, em 1933 foi reconhecido como o verdadeiro autor do livro.

Malba Tahan publicou 120 livros, dos quais 51 são voltados à matemática. Em suas obras conseguiu repassar o conteúdo matemático em histórias envolventes, constituídas de enigmas e fantasmas, tornando-as leituras divertidas e empolgantes. Assim, com a junção de suas duas paixões, conseguiu transmitir a matemática de uma forma memorável de forma que até o dia de sua morte já havia vendido mais de um milhão de seus livros, e o livro mais famoso, “O homem que calculava”, tornou-se um Best-seller que até hoje atrai novos leitores.

O tempo previsto para esta apresentação é de aproximadamente 10 minutos. Ao fim da atividade, será aberto um espaço para possíveis dúvidas e perguntas dos estudantes sobre o assunto.

ETAPA 2: CIRCUITO DE ATIVIDADES

Em um espaço apropriado da instituição (preferencialmente a quadra de esportes), será montado um circuito com algumas atividades relacionadas a conteúdos matemáticos. Assim cada grupo será direcionado a determinada atividade, de forma que ao final todos os grupos tenham realizado todas as dinâmicas propostas. As tarefas serão diferenciadas, por conta disto às pontuações e tempo de execução serão de acordo com a dificuldade da atividade.

ATIVIDADE 1: Corrida com balões

Participantes: 2 equipes, 1 aluno de cada equipe;

Conteúdo: Expressões algébricas, equações e charadas;

Será escolhido, por rodada, um integrante de cada equipe para pegar um balão e correr com o mesmo por um percurso e ao final estourá-lo, isto deverá ser feito da forma que o aluno conseguir. Pontuará 10 pontos o aluno que conseguir responder corretamente a equação ou charada.

Charadas:

- Você está num quarto escuro. E com o tato encontra à sua frente três objetos: um fósforo, uma vela, e uma lamparina. Qual destes você acenderá primeiro? ***Resposta:*** O fósforo. Para acender os outros dois, necessariamente, você deverá acender o fósforo.
- Paula quer sair à noite, mas sua mãe a proibiu. Mesmo assim ela resolve tentar, mas lembra-se que não tem nenhum par de meias limpas, mas sabe que sua mãe tem no quarto dez pares de meias, cinco pares brancos e cinco pares pretos. Se todas as meias estão misturadas e para pegar as meias Paula não poderá acender a luz para não acordar sua mãe, qual número mínimo de meias Paula deverá pegar para ter certeza que tem um par de meias da mesma cor? ***Resposta:*** Três meias. Ao pegar uma meia Paula não pode saber se esta é branca ou preta, ao pegar a segunda pode-se formar um par da mesma cor, mas também pode ser uma meia de cor diferente, ao pegar uma terceira meia está só fará par com alguma das duas anteriores, pois só pode ser branca ou preta.
- Três pessoas querem atravessar um rio bem fundo, nenhuma das três sabe nadar. Para essa tarefa elas possuem um barco, mas sabem que o barco suporta menos de 150 quilogramas. Elas pesam cinquenta, setenta e cinco, e cem quilogramas. Como farão nossos personagens para atravessar o rio? ***Resposta:*** Atravessam, no barco, os personagens que pesam 50 e 75, mas apenas o de 50 retorna trazendo o barco de volta. E ele fica novamente nessa margem, e apenas o de 100 quilogramas atravessa dessa vez, e quem retorna com o barco, é o de 75, que volta para buscar o de 50, e os dois atravessam o rio e terminam a travessia.
- Você precisa cozinhar um ovo por dois minutos exatos, mas para isso você possui somente duas ampulhetas, uma que marca cinco minutos e uma que marca três minutos. Como fazer? ***Resposta:*** Simples. Apenas deite as duas ampulhetas ao mesmo tempo, quando a de três se esgotar coloque o ovo para cozinhar, pois faltará exatamente dois minutos para a finalização da outra ampulheta.
- Se 1 camiseta demora 1 hora para secar no varal, quanto demoram 100 camisetas para secar? ***Resposta****:* 1 hora

- Uma garrafa com sua rolha custam 1,10. Sabendo que a garrafa custa 1 real a mais que a rolha, quanto custa a rolha? ***Resposta**:* 0,05 reais, ou 5 centavos
- Em uma igreja havia 4 velas. Um ladrão entrou e levou 2 velas. Quantas velas ficaram? **Resposta:** 6 velas
- Uma mãe tem 30 reais para dividir entre duas filhas. Que horas são? **Resposta:** 15 para as duas, 13:45
- Num avião havia 4 romanos e 1 inglês. Qual o nome da aeromoça? **Resposta:** Ivone
- Em um arquipélago tem 3 ilhas. Cada ilha tem 3 palmeiras. Se 3 palmeiras dão três cocos, quantos cocos há no total? **Resposta:** Nenhum, pois palmeira não dá coco.

As equações utilizadas para o desenvolvimento desta atividade se encontram no anexo 1.

ATIVIDADE 2: Hexágono Mágico

Participantes: 2 equipes simultaneamente;

Conteúdo: Números Naturais;

Nesta atividade, os alunos serão dirigidos a uma mesa com o jogo Hexágono Mágico, conforme figura 1. Este é composto por sete peças hexagonais regulares, cada uma dividida em 6 triângulos equiláteros numerados de forma aleatória. Os alunos deverão colocar seis das peças hexagonais em volta de uma sétima peça (formando uma rosácea), obedecendo a seguinte condição: dois hexágonos só podem ser postos lado a lado se estes tiverem números iguais. A equipe que conseguir montar a rosácea ganhará 15 pontos.

Figura 46: Hexágono Mágico

Fonte: autores

Atividade 3: Twister Matemático

Participantes: 2 equipes;

Conteúdo: Diversos;

Baseado no já existente jogo “Twister”, em que, os jogadores têm que mover pés e mãos conforme a indicação da roleta sem perder o equilíbrio ou cair. Twister Matemático, conforme figura 3, terá o mesmo conceito, entretanto os participantes responderão uma pergunta matemática para descobrir em qual número terão que se posicionar. Não será usada roleta, como no original, mas sim dois dados nos quais o primeiro indicará com qual membro (pé ou mão) e o segundo indicará a orientação do membro (esquerda ou direita) que deverá ser colocada no tapete. As perguntas poderão ser respondidas por alunos a partir do Fundamental II.

Figura 47: Twister Matemático

Fonte: autores

Componentes:

- 1 tapete com 16 círculos numerados ao acaso;
- 1 dado indicando os membros;
- 1 dado indicando a orientação do membro (direita ou esquerda);
- Cartas com perguntas;
- 1 regra.

Como jogar:

1. Twister Matemático é um jogo criado para ser jogado de 2 a 4 jogadores. Requer que os participantes tenham um breve conhecimento matemático, como também agilidade para não perder o equilíbrio. Vence o jogo aquele que não tocar com o joelho ou cotovelo na superfície;

2. Abra o tapete sobre uma superfície plana com o lado colorido e numérico para cima. Colocar os dados e as cartas ao lado do tapete;

3. Os jogadores tiram os sapatos (o ideal é jogar de meias) e se colocam em pé, frente a frente, em extremos opostos do tapete, perto da palavra "Twister Matemático";

4. Cada jogador coloca um pé em um círculo amarelo e o outro em um círculo azul, os mais próximos de cada extremo, perto da palavra "Twister";

5. Uma pessoa chamada de “juiz” sorteia as cartas e faz a pergunta em voz alta para o jogador poder responder. Caso este acerte, serão jogados os dados para indicar o membro e a direção que ele colocará o membro no número que obteve na resposta;

6. O jogador, da vez, deverá se mover sem tocar com o cotovelo ou joelho na superfície.

7. Somente uma mão ou um pé pode ocupar um círculo de cada vez;

8. O juiz deverá ficar atento para que a pergunta que ele fez ao participante anterior não tenha a mesma resposta do seguinte, pois não podem ocupar o mesmo círculo. Entretanto, quando o mesmo jogador obtiver o resultado que ele já ocupa este poderá ser trocado pelo membro sorteado na rodada;

9. Uma vez que as mãos e os pés estejam colocados nos círculos, inclusive os dois pés colocados no início, eles não podem ser movidos ou levantados sem uma nova indicação dada pelo juiz após responder a pergunta e jogar os dados. No entanto, uma mão ou um pé podem ser levantados para dar passagem a outra parte do corpo, mas devem retornar imediatamente ao círculo do qual saíram. O juiz deve ser notificado antes que esse movimento seja efetuado;

10. Quando um jogador cai ou deixa qualquer parte do corpo, que não seja uma mão ou um pé, tocar o tapete (um cotovelo ou joelho, por exemplo), o jogo termina para este;

11. Quando jogado por 4 integrantes, eles poderão formar duas duplas e neste caso os jogadores da mesma dupla poderão ocupar o mesmo círculo com o número da resposta;

12. Termina o jogo, quando um jogador ou dupla sobrar no tapete. No caso de duplas, quando um integrante cair ou tocar a superfície, essa dupla sai da partida.

Perguntas para o Twister Matemático

Qual é a raiz quadrada de 49?	Qual é a raiz quadrada de 81?	Qual é a raiz quadrada de 16?	Qual é a raiz quadrada de 25?
Quanto é: 5 x 5 + 5?	Quanto é: 4 + 4 x 4?	Quanto é: ½ + ½?	Quanto é: 1 - ½?
1 dúzia equivale a quanto?	Quanto é: 6 x 4 – 24	Quanto é: 6 x 6 – 6?	Quanto é: 6 x 6 / 6?
Quanto é: 6 / 6 + 6?	Meu avô tem 4 filhos, cada um tem 4 filhos. Quantos primos eu tenho?	Eu estava levando 10 vacas para o pasto, mas uma morreu. Quantas ficaram?	4 + 4 + 4 equivale a 12. Qual é a outra soma de três números iguais que também resulta em 12?

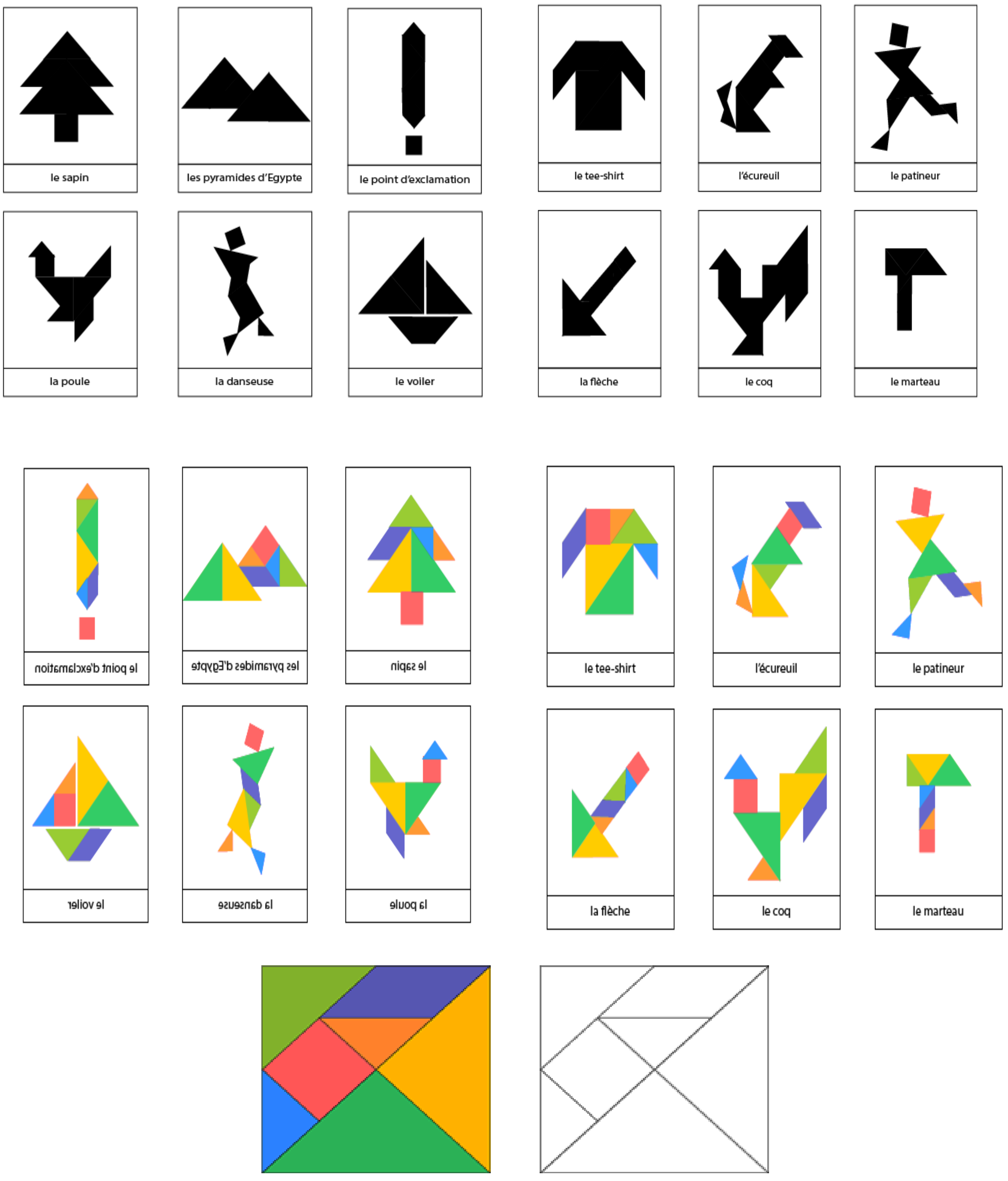
Atividade 4: Tangram

Participantes: 1 equipe;

Conteúdos: Noções lógicas e geométricas.

Neste desafio, a equipe deverá utilizar das sete peças do tangram para montar um quadrado, as mesmas estarão dispostas em cima de uma mesa (ou chão). A equipe que conseguir ganha 10 pontos. Pontuação extra (10 pontos) para equipe que além de montar o quadrado conseguir construir alguma das figuras abaixo:

Figura 48: Figuras com o Tangram



Fonte: https://lululataupe.com/imprimerie/jeux-d-observation/tangrams/

Atividade 5: Amarelinha

Participantes: 2 equipes;

Conteúdo: Diversos.

O objetivo desse jogo é revisar as quatro operações de forma lúdica, tornando mais fácil e agradável o ensinar e aprender, agregando além do conhecimento matemático o raciocínio rápido, melhorando a coordenação motora, o relacionamento com o grupo e também o espírito competitivo.

A amarelinha será dividida em três níveis de dificuldade: Fácil, do 1 ao 4; Médio, do 5 ao 7; Difícil, do 8 ao 10; e um desafio final. Cada nível é representado por uma cor e possui um envelope contendo perguntas. O nível fácil contém perguntas que envolvem as quatro operações, o médio tem perguntas com resolução de expressões numéricas, o difícil tem questões de radiciação e potenciação e o desafio matemático consiste em questões envolvendo lógica.

REGRAS DO JOGO:

- Pode ser jogado em dupla ou de forma individual;
- Para decidir quem inicia o jogo, cada um lança o dado para o ar. O que tirar o maior número inicia;
- O iniciante precisa acertar a pedrinha em uma das casas do nível fácil;
- Após acertar, precisa lançar o dado para o ar novamente e responder a questão do envelope do nível correspondente ao número sorteado do dado;
- Acertando a questão o jogador pula a amarelinha e segue a mesma lógica para pular os outros níveis;
- Vence o jogador que concluir primeiro todos os níveis.

As perguntas para o desenvolvimento desta atividade se encontro no anexo 2.

Atividade 6: Passe ou repassa

Participantes: 2 equipes;

Conteúdo: Diversos;

Nesta atividade participaram dois grupos, para decidir a equipe que começará, será escolhido um representante de cada grupo para determinar no “par ou ímpar”. Quem ganhar sorteia um problema na caixa para tentar responder junto à equipe. Caso não consigam responder, passa para o outro grupo e se o mesmo não souber resolver repassam, e o que ficar com a questão sem solução pagará uma prenda, logo, só ganhará o ponto, aquele que solucionar o problema. O grupo que responderá a próxima pergunta será aquele que acertou a questão anterior ou, o qual não pagou a prenda. A equipe que acertar ganhará 5 pontos.

PERGUNTAS PARA PASSA E REPASSA

Quantas vezes você pode diminuir 2 de 100?

Quanto é o dobro 1500?

Qual é o dobro da metade de 2000?

Quantas vezes podemos dividir 10 por 5?

Se$10^0 = 1$, então5^0 é quanto?

Diga um número primo.

Quanto é 50% de 120?

Quanto é 87% de 100?

Quantos centavos equivalem a R$3,00?

Qual é $\frac{1}{4}$de uma dúzia?

3x6 = 6x3

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Se uma régua tem 30 cm, quanto vale $\frac{1}{3}$desta régua?

Quais números dividem 17?

Todo número par é divisível por ___.

Atividade 7: Bingo da multiplicação

Participantes: todas as equipes;

Conteúdo: Multiplicação de números inteiros.

O jogo é composto por cartelas quadriculadas em que cada quadrado contém o produto entre dois números inteiros. O docente deve falar um número inteiro e os discentes devem identificar se entre os produtos de sua cartela conseguem obter o número dito pelo professor.

Atividade 8: Torre de Hanói

Participantes: 2 equipes simultâneas;

Conteúdo: Exponenciação;

Este desafio será feito por um integrante da equipe, que terá que transportar 4 discos de um dos pinos a outro seguindo as regras da Torre de Hanói, representada na figura 2, ganhará 10 pontos a equipe que completar o desafio.

- Deve-se passar um disco de cada vez;
- Nunca um disco maior pode ficar em cima de um disco menor.

Figura 49: Torre de Hanói

Fonte: autores

Atividade 9: Jogo da Soma

Participantes: 2 equipes simultâneas;

Conteúdo: Operações fundamentais;

Neste jogo participam 2 equipes, das quais 2 integrantes de cada uma jogam, donde haverá um tabuleiro composto por quatro colunas que vão de -6 a 6 e também por dois dados, sendo que um destes representará valores negativos e os outros valores positivos.

Inicialmente se decide, nos grupos, a ordem em que cada integrante irá jogar. Isto definido, o jogador da vez lançará os dados, se valendo de que um dado representa valores negativos e o outro, positivos. Com o objetivo de chegar aos extremos do tabuleiro, - 6 a 6 ganhará o jogador que alcançar o máximo de vezes possível os extremos do tabuleiro. A cartela do jogo se encontra no anexo 3.

Atividade 10: Dominó de equações do primeiro grau

Participantes: 2 equipes simultâneas;

Conteúdo: Equações;

O jogo baseia-se em um dominó de equações, em que temos expressões algébricas do primeiro grau e valores numéricos que representam a raiz da equação, ou ainda expressões equivalentes. As regras para se jogar são semelhantes à de um dominó usual, serão distribuídas peças para os jogadores e sobrarão algumas para "pescar", vence aquele que ficar sem peças, ou seja, utilizar todas as suas peças primeiro.

Resultados

Com estas atividades diversificadas, esperavamos que os discentes conseguissem ter uma visão diferente sobre o campo da matemática, a vendo não apenas como uma disciplina, mas como uma ciência aplicada em diversas situações do cotidiano. Isto felizmente se concretizou, obviamente não de maneira homogênea, mas de acor~~o~~do com a compreensão de cada discente. Além disso, esperavamos proporcionar uma abordagem diferenciada dos conteúdos matemáticos já abordados em sala de aula de maneira a reforça-los e elucidar possíveis dúvidas, o que fora possível e aparentemente satisfatório para os alunos que apresentaram entusiasmo no desenvolvimento das atividades.

3.1 Referências

BRASIL. **Lei Federal nº12 835**, de 26 de junho de 2013, que institui o Dia Nacional da Matemática. Casa Civil, subchefia para assuntos jurídicos. Brasília, DF, 26 de junho de 2013.

D'AMBROSIO, U. **Por que se ensina Matemática?** Disponível em: http://apoiolondrina.pbworks.com/f/Por%2520que%2520ensinar%2520Matematica.pdf Acessado em: 20 jul. 2017.

PAULA, R. T. **Twister Matemático.** 2014. 12f. Trabalho Pibid – Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 2014.

TAVARES, Carina Cesário Abdala. **Situações-Problema 2.** São Paulo, 25 jan. 2011. Disponível em: <http://professoracarina.blogspot.com/2011/01/situacoes-problema-2.html> Acesso em: 18 abril 2018.

3.2 RELATÓRIO DA EXECUÇÃO DO PROJETO

Nos dias 19 e 26 de Junho de 2018, tivemos a oportunidade de realizar uma gincana de matemática, em comemoração ao Dia Nacional da Matemática, no período vespertino com turmas do 7º ano do Colégio Estadual Ieda Baggio Mayer. A gincana foi elaborada em colaboração com o grupo de estágio, professores-orientadores e a professora responsável pelas turmas na instituição, a mesma teve duração de oito horas, quatro horas em cada um dos respectivos dias, contemplando duas turmas do 7º.

No primeiro dia, inicialmente se fez breves comentários a respeito da instauração do Dia Nacional da Matemática no Brasil e sobre Júlio Cezar de Mello de Souza, mais conhecido como Malba Tahan, que inspirou diversos matemáticos e o público em geral com seus contos envolvendo tramas sociais e conceitos matemáticos. Feito isto, dividimos os discentes em grupos de até 4 integrantes e distribuímos um cartão para marcar os pontos das atividades concluídas. Neste dia, foram desenvolvidas cinco atividades, na quadra de esportes, em que se observou os seguintes aspectos:

- **Corrida com balões:**

Atividade esta que gerava mais entusiasmo entre as equipes pelo fato de correr e realizar a charada mais rápido que o outro grupo, mesmo que o que valesse na verdade fosse a resolução correta e não o menor tempo. Charadas estas divididas entre equações de primeiro grau e expressões numéricas, uma grande oportunidade para os discentes praticarem e até mesmo aprenderem sobre, pois este era o conteúdo que estavam trabalhando em sala de aula, ou haviam trabalhado recentemente.

As equipes em si eram deveras participativas, constatamos isso pois equipes formadas por alunos que em sala, sequer levam materiais, demonstraram que sabiam fazer as charadas. Um fato interessante durante esta atividade, dois integrantes, irmãos, de uma equipe eram de outra nacionalidade, um deles aprendera português antes que o outro e toda e qualquer dúvida que a equipe possuía o que sabia português traduzia para o que não sabia, conferindo se este podia ajudá-los de alguma forma.

Em suma foi gratificante acompanhar os alunos nesta atividade, pois com a ludicidade conseguimos gerar nestes, por mais que em um período ínfimo comparado com o ano letivo inteiro, o interesse pela matemática e aprender mais dela. Ao final desta atividade, os balões já haviam se esgotado, e mesmo assim as equipes não se esmoreceram e continuaram a correr e resolver as charadas.

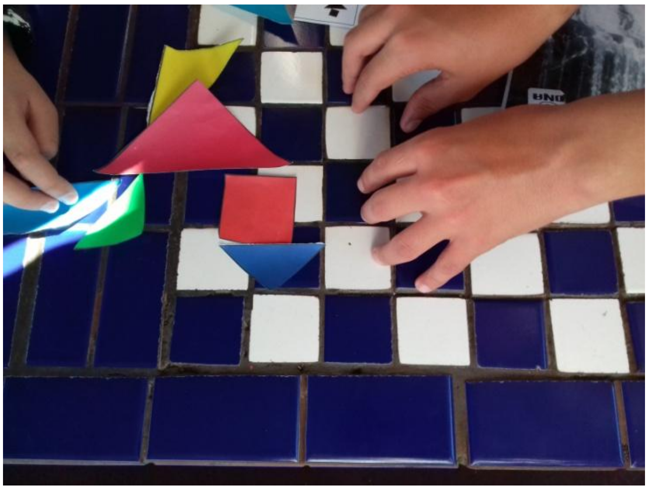
Figura 50: Corrida com balões

Fonte: autores

- **Tangram:**

Nesta atividade, cada uma das equipes participantes recebeu um Tangram com 7 peças e uma folha com algumas figuras sombreadas, os discentes deveriam tentar construir as figuras utilizando as peças e se possível formar um quadrado utilizando todas as peças.

Figura 51: Tangram



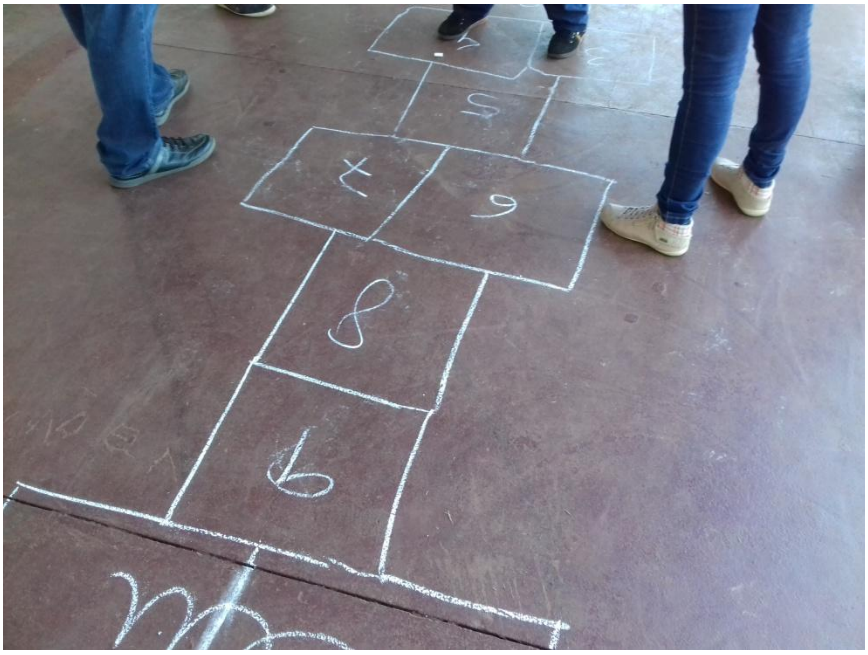
Fonte: autores

Em um contexto geral, percebeu-se que os discentes não possuem uma interpretação geométrica intuitiva das figuras, pois não relacionavam que um retângulo/quadrado/paralelogramo pode ser divido em triângulos. Contudo, após certos encaminhamentos, grupo a grupo os alunos começaram a perceber tais relações e conseguiram montar a maioria das figuras e aparentaram visível interesse nas atividades.

- **Amarelinha:**

Nesta atividade, uma ou duas equipes participaram do jogo. Ele foi constituído em perguntas de diferentes níveis, dependendo do número em que a pedra caia na amarelinha, cada pessoa de todas as equipes deveriam participar e cabia a quem jogou a pedra a resposta final, sendo que todos do grupo podiam ajudar. O critério para decidir se dava pelo número de respostas certas, sendo que nas respostas de nível médio e difícil eram respondidas com maior precisão, enquanto algumas das perguntas fáceis deixavam os alunos em dúvida e quando erravam a questão, pediam para que fosse explicado em qual passo erraram e como deveria ser feito.

Figura 52: Amarelinha



Fonte: autores

As perguntas eram variadas, tendo raciocínio lógico, soma, subtração, regra de três, multiplicação, divisão e outras.

- **Twister:**

Nesta atividade, duas equipes participaram do jogo. Em um primeiro momento, pudemos perceber que a cada início as equipes que jogavam ficavam acanhadas, porém, ao decorrer do jogo, todas as equipes participaram ativamente. Para o jogo, explicamos as regras e pedimos que cada equipe escolhesse um jogador para ir ao tapete. Os alunos que ficaram no tapete, ajudaram o restante da equipe a responder as perguntas, e muitos, sem sair nem um instante do tapete ou tirar um membro. No final, ganhou as equipes no qual o jogador tinha que estava no tapete, não havia caído ou encostado outra parte do corpo a não ser os membros citados nas regras.

Figura 53: Twister Matemático

Fonte: autores

As perguntas feitas aos alunos consistiam em soma, multiplicação com divisão, radiciação e raciocínio lógico. Muitos alunos invertiam as operações e somavam antes de multiplicar ou dividir. As perguntas mais erradas eram as de raciocínio lógico. Mas no final, todos entendiam a pergunta e o erro feito.

- **Hexágono Mágico:**

Nesta atividade os discentes deveriam formar uma rosácea utilizando 7 hexágonos numerados, os quais tinham que ser postos em uma forma circular de maneira que os lados encostados tinham que apresentar os mesmos números. Percebeu-se, como já era esperado, que a dificuldade comum dos grupos foi encontrar a peça chave/central, mas após algumas tentativas praticamente todos os grupos conseguiram arranjar a rosácea. Ainda, pelos relatos dos discentes percebeu-se que, os mesmos, consideraram essa atividade desafiadora e se mostraram interessados em concluí-la.

Figura 54: Hexágono Mágico

Fonte: autores

- **Bingo Multiplicativo:**

A atividade foi realizada em sala de aula, com a presença de todos os alunos. Explicamos primeiramente, que podíamos obter um mesmo resultado para multiplicações diferentes, pois estávamos trabalhando com os números inteiros. Para explicitar isso, escrevemos como resultado o número 4 e como multiplicação poderíamos obter: 2x2, 4x1, (-2)x(-2), (-1)x(-4), 1x4 e (-4)x(-1). Assim, quando sorteávamos um número, o aluno só poderia marcar uma vez a multiplicação correspondente.

No decorrer do jogo, passávamos nas carteiras e observando as marcações~~.~~ p~~P~~ercebemos que muitos alunos esqueceram a multiplicação referente ao resultado dado e tentavam calcular manualmente várias das multiplicações que estavam em sua cartela, observando se alguma dava o resultado dito.

No fim, ganhou o bingo o aluno que marcou todas as multiplicações que estavam em uma linha. Corrigimos no quadro, junto aos alunos. Para finalizar, comentamos o objetivo da atividade, que era estimular o cálculo mental.

- **Passa ou Repassa:**

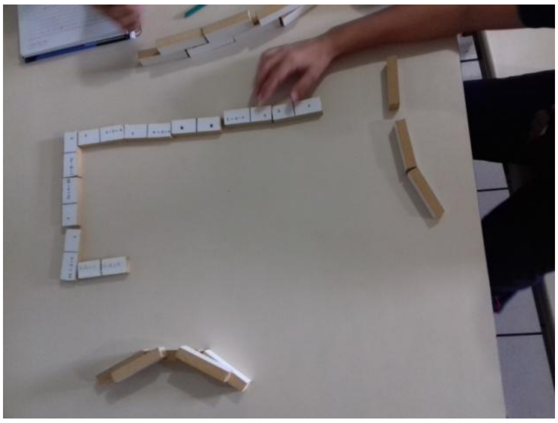
No segundo dia, realizamos a atividade em sala. Na primeira turma, para finalizar as atividades, e na segunda turma, após o bingo multiplicativo. Primeiro dividimos os alunos em dois grupos e explicamos as regras. Os alunos estavam empolgados, pois já havíamos distribuídos os “prêmios” e sabiam que o grupo vencedor seria recompensado. Decidimos que o primeiro grupo a marcar 4 pontos ganharia.

A cada pergunta feita, o grupo questionado, mostrava-se eufórico para não errar a questão. Todos os alunos participaram ativamente na atividade. Por isso, ao final da atividade, obtivemos um empate, em ambas as salas. Em concordância com os alunos, foram escolhidos dois alunos, um de cada grupo, e realizada a última pergunta, ao final da contagem de 1 até 3, quem levantasse a mão primeiro, responderia. Se errasse, passava para o outro aluno responder, e se, o mesmo errasse, uma nova pergunta seria feita. No fim, um grupo de cada sala respondeu corretamente.

- **Dominó de equações:**

Nesta atividade, duas equipes competiam entre si, as regras são basicamente as mesmas do dominó, cada equipe recebeu sete peças e o restante das peças ficaram para coleta em caso de não haver a peça necessária para dar sequência ao jogo. As peças do dominó apresentam números e equações, os discentes poderiam colocar juntas duas peças com equações com a mesma raiz, duas peças com o mesmo número ou uma peça com um número que é raiz da equação da outra peça.

Figura 55: Dominó de Equações



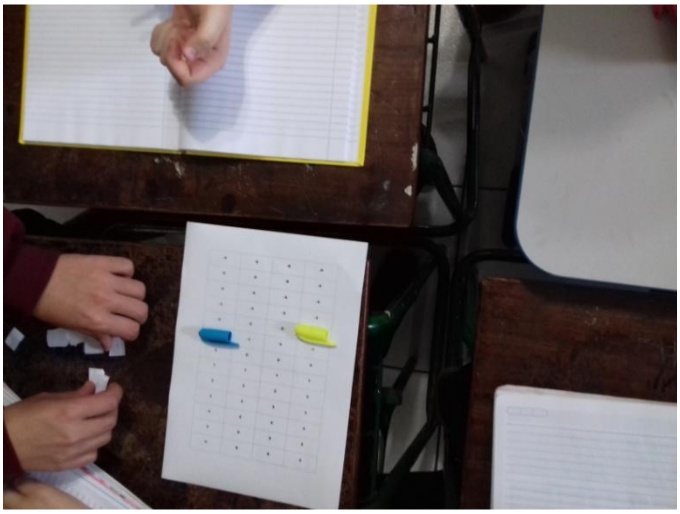
Fonte: autores

Os discentes apresentaram dificuldades na resolução das equações, pois haviam começado a trabalhar com este conteúdo recentemente. Contudo, após alguns encaminhamentos os alunos conseguiram prosseguir com o jogo de forma contínua.

- **Jogo da Soma:**

Jogo desenvolvido no segundo dia dentro do refeitório do Colégio, a cada duas equipes eram feitas partidas até que outras equipes se encontrassem desocupadas. Desde os primeiros momentos de contato com o jogo as equipes mostraram-se animadas, era notório que o fator competitividade era primordial para eles naquele momento.

Figura 56: Jogo da Soma



Fonte: autores

De uma maneira geral não tiveram grandes dificuldades, o que mais se percebia era certa confusão com jogo de sinal, como quando se soma números negativos, era comum eles fazerem o clássico, menos com menos é mais, erroneamente, pois se tratava de uma soma, mas esta confusão era sanada rapidamente quando se evocava uma situação de dívida.

Em nenhum momento as equipes mostraram-se desinteressadas em desenvolver a atividade, pelo contrário a competitividade como acima mencionada, motivou-os a praticar estes conceitos primordiais de soma, de números negativos e positivos.

- **Torre de Hanói:**

Esta atividade poderia ser composta em um ou dois grupos. O grupo deveria mover apenas uma torre de quatro peças, pois com as seis seria mais difícil e custaria um tempo maior. O grupo que conseguisse fazer no mínimo de jogadas, 15 delas, ganharia o maior número de pontos e se passasse dela teria os pontos reduzidos. No início foi deixamos que eles praticassem um pouco e contassem em quantas jogadas fizeram. Poucos grupos apresentaram dificuldade, pois alguns colocavam as peças maiores sobre as menores e outros tiveram muito individualismo nessa atividade, pois queriam montar do seu jeito.

Ao final do segundo dia, realizamos a contagem dos pontos de cada equipe definindo a vencedora, a qual cada integrante do grupo ganhou um prêmio extra (chocolate) além do prêmio coletivo (pirulito) que fora distribuído, e ainda distribuímos um prêmio extra (chocolate/pirulito) para a equipe que venceu o passa ou repassa e para os discentes que ganharam o bingo.

Por fim, parabenizamos novamente a turma por sua participação e por notarmos que os alunos estavam verdadeiramente empolgados no desenvolvimento das atividades.

ANEXOS

ANEXO 1

Cartela de Equações

3x-7=2	4x-6=2x	9x-7=2	5x-17=8
6x-8=4	5x-12=3x	x-7=2	8x-7=17
12x+6=6x-2	10x-100=0	15x-30=0	100x-997=3

x+30=40	x-20=10	2x-50=50	30-20+2x=10
5x-16=4	6x-12=2x	4x-7=1	3x+3=2x+28
6x-12=2x+4	100x-1=99	35x-2=33	x-10+20=50

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=$	$\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=$
$\left(\frac{1}{2}\div 2\right)+\frac{3}{4}=$	$\left(\frac{2}{4}\times 2\right)+\frac{4}{4}=$	$\frac{2}{8}+\frac{3}{4}=$
$\frac{5}{5}+\frac{4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=$	$\left(\frac{3}{7}\times 7\right)\div 3=$	$\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{10}\times 2\right)=$
$\frac{3}{8}+\frac{4}{2}-\frac{19}{8}=$	$\left(\frac{1}{2}\div 2\right)+\frac{7}{4}=$	$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)+2=$

$15-(3.2)+7=$	$25+37-61=$	$(4\div2)+(12.2)=$
$(16\div4)+12=$	$12+(4\div2)-14=$	$(15.2)\div2=$
$7-8+2-10+9=$	$(6.6)\div36=$	$(15\div15)+1=$
$\{(12.10)-20\}\div10=$	$100-90+(50\div2)=$	$(20.5)-100=$
$(10.10)-50=$	$(2.50)\div2=$	$\{(100\div2)+10\}\div5=$

ANEXO 2

PERGUNTAS PARA A AMARELINHA

PERGUNTAS FÁCEIS

1. O Termômetro subiu 6 graus, o que representa a metade da temperatura de antes. A quantos graus está agora? **R:** 18 graus
2. O Avicultor diz: “Se eu tivesse dois Patos a mais, o dobro desse número seria 100.” Quantos Patos tem ele? **R:** 48 patos
3. Zezinho tem 24 bolas. Dá 4 para Luizinho e ambos ficarão com quantidade igual. Quantas bolas tinhas Luizinho inicialmente? **R:** 16
4. Pedrinho tem 6 bolas a mais do que Chico. Os dois juntos têm 54. Quanto tem cada um? **R:** P=30, C=24
5. Seis pessoas comem 6 biscoitos em seis minutos. Quantas pessoas comerão 80 biscoitos em 48 minutos? **R:**10 pessoas
6. Perguntado pela idade, Pedro responde: “Daqui a 30 anos, terei três vezes a idade de agora.” Qual a idade de Pedro? **R:** 15 anos
7. A Mãe é três vezes mais velha que a filha. Juntas têm 48 anos. Qual é a idade de cada uma? **R:** 36 e 12
8. Se estivessem na sala de aula 5 alunos mais, a metade deles seria 20 alunos. Quantos estão lá realmente? **R:** 35
9. Oito estudantes se encontram e cada um, cumprimenta o outro com um aperto de mão. Quantos apertos de mão se trocaram? **R:** 28

PERGUNTAS MÉDIAS

1. Se diminuirmos em 1 centímetro as tiras que vamos cortar, em vez de 8 vamos ter 9 tiras. Qual era o tamanho da peça inteira? **R:** 72 cm
2. Alguém distribui bombons para 6 crianças, dando a mesma quantidade para cada uma. Ocorre que cada criança recebe um bombom a mais do que se toda caixa fosse distribuída entre 7 crianças. Quantos bombons havia na caixa? **R:** 42
3. 12 trabalhadores têm que transportar 12 sacos de milho da roça para o mercado. Cada um só pode carregar um saco. Os 12 precisam de 1 hora para fazer isso. Em quanto tempo 6 trabalhadores farão todo o transporte? **R:** 3 horas

4. Uma menina está levando os gansos para a beira de um lago. Um deles corre na frente de outros dois; um corre entre dois e um corre atrás de dois. Quantos são os gansos? **R:** 3

5. Há 24 passageiros no ônibus, entre homens e mulheres. Se 3 homens saltassem do ônibus, o número de mulheres seria o dobro do de homens. Quantos homens e quantas mulheres estavam lá dentro? **R:** 14 mulheres e 10 homens

6. Numa caixa de fósforos há 85 palitos. Depois de transferidos para duas caixas, uma delas ficou com um terço de palitos a menos que a outra. Quantos fósforos há em cada caixa? **R:** 34 e 51

7. A mãe de Felipe o mandou ao supermercado comprar 9 latas grandes de Figo. Ocorre que ele só consegue levar duas latas de cada vez. Quantas viagens ao supermercado Felipe teve que fazer? **R:** 5

8. Maria e Ana têm, cada uma, um pacote de biscoitos, sendo que cada pacote tem a mesma quantidade de biscoitos. Se Ana doar 10 biscoitos para Maria, esta ficará com três vezes mais biscoitos que sua colega. Quantos biscoitos há em cada pacote? **R:** 20 biscoitos

9. Joãozinho tem 24 bolas. Dá então 4 para Pedrinho e ambos ficam com quantidades iguais. Quantas bolas Pedrinho tinham inicialmente? **R:** 16 bolas

PERGUNTAS DIFÍCEIS

1. Marcos toma dois banhos diários e consome nestes banhos, um total de 270 litros de água. Se em cada banho Marcos gasta 15 minutos, quanto economizaria de água por semana, se tomasse apenas um banho por dia, de 12 minutos? **R:** 1134 L

2. Quatro máquinas idênticas produzem, em duas horas de trabalho, 2800 peças. Determine o tempo necessário, em horas, para que três dessas mesmas máquinas consigam produzir 21.000 peças. **R:** 20

3. Ligia foi ao supermercado e verificou que o preço de 600 g de presunto era equivalente ao preço de 1,5 kg de apresuntado. Com o mesmo valor, resolveu comprar uma quantia de cada um, ou seja, 400 g de presunto e quantto de apresuntado? **R:** 1 kg

4. Uma pessoa paga R$ 1.050,00 por um trimestre de aluguel da sua moradia. Quanto essa pessoa pagará em 5 meses de aluguel? **R:** R$ 1750,00

5. Hoje a promoção de um supermercado é “Leve 3 e pague 2” na sessão de limpeza. Kátia aproveitou esta promoção e levou 3 vassouras por R$24,00; 3

amaciantes de roupa por R$12,00 e 9 detergentes por R$18,00. Quanto Kátia está economizando? **R:** R$ 27,00

6. Um ventilador, cujo preço normal é R$ 96,00, será vendido em uma liquidação que dará 30% de desconto sobre o preço normal. Qual o valor promocional deste ventilador? **R:** R$ 67,20

7. Antonio foi ao supermercado para comprar 5 garrafas de 1,5 litro cada de refrigerante. Mas encontrou só latinhas de 350 ml. Quantas latinhas deve levar para obter a quantia desejada? **R:** R$ 22 latinhas

8. A razão entre o sucessor e o antecessor de um número é 2. O número em questão é? **R:** 3

9. Em uma prova de corrida com obstáculos, Cintia fez o percurso em 12minutos e 36 segundos. Marta fez em 11 minutos e 57 segundos. Qual o tempo total que as duas gastaram? **R:** 24 min e 33 seg

ANEXO 3

CARTELA DO JOGO DA SOMA

6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2
1	1	1	1
0	0	0	0
-1	-1	-1	-1
-2	-2	-2	-2
-3	-3	-3	-3
-4	-4	-4	-4
-5	-5	-5	-5
-6	-6	-6	-6